基礎ゼミ　1 組,2 組　　2008 年 5 月 12 日

- **(実数の連続性)** $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が上に有界であれば、E の上界の最小値が存在する。それを $\sup E$ とかく。$E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が下に有界であれば、E の下界の最大値が存在する。それを $\inf E$ とかく。

24. 上記の実数の連続性を用いて、$E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が上に有界であるとき、$\sup E = \alpha$ となるためには
　(a) $\forall x \in E$ に対して $x \leq \alpha$,　(b) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $x \in E$ があって $x > \alpha - \varepsilon$ とできる
の 2 条件が成り立つことが必要十分であることを示せ。[1]

cf. 全く同等に、$E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ が下に有界であるとき、$\inf E = \beta$ となるためには
　(a) $\forall x \in E$ に対して $x \geq \beta$,　(b) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $x \in E$ があって $x < \beta + \varepsilon$ とできる
の 2 条件が成り立つことが必要十分となる。

- 実数の連続性から前回やった Archimedes の原理および次の有理数の稠密性が従う。
(有理数の稠密性) 任意の異なる二つの実数の間には有理数が存在する。

25. 上に有界な集合 $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ に対し、その最大値 $\max E$ が存在し $\max E = \alpha$ であれば、$\sup E = \alpha$ となることを示せ[2]。(全く同様に、下に有界な集合 $E(\neq \emptyset) \subset \mathbf{R}$ に対し、その最小値 $\min E$ が存在すれば、$\inf E = \min E$ となる。)

例題　$A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, 0 < x \leq 2 \right\}$ のとき、その上限、下限を求めよ。

解: $\sup A = 2$ を示す。$\forall x \in A$ に対して $x \leq 2$ であり、$2 \in A$ であるから、$\max A = 2$. よって、$\sup A = \max A = 2$ となる。
$\inf A = 0$ を示す。$\forall x \in A$ に対して $x \geq 0$ は明らか。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$0 < \min\{\varepsilon, 2\}$ であるから、有理数の稠密性によりある $x \in A$ があって $0 < x < \varepsilon$ とできる。従って、$\inf A = 0$ となる。
以上により、$\sup A = 2$, $\inf A = 0$.　□

26. 次の集合 A に対し、その上限、下限を求めよ。ただし、$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1) $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, 0 \leq x < 2 \right\}$　　(2) $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \right\}$

(3) $A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, x^2 < 2x + 3 \right\}$　　(4) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

(5) $A = \left\{ (-1)^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$　　(6) $A = \left\{ \dfrac{m-n}{m+n} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{N} \right\}$

27. $A \subset (0, \infty)$ は空でない上に有界な集合とし、$B = \left\{ \dfrac{1}{x} \,\middle|\, x \in A \right\}$ とおく。このとき、次を示せ。

(1) B は下に有界で、$\inf B = \dfrac{1}{\sup A}$.

(2) $\inf A > 0$ であれば、B は上に有界で $\sup B = \dfrac{1}{\inf A}$.

28. 一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ[3]。($\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ は既知とする。)

(1) $\dfrac{\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 - n + 1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$　　(2) $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$　　(3) $n^2\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

(4) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$　　(5) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　　(6) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

(7) $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$　　(8) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$　　(9) $\dfrac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbf{R})$　　(10) $\dfrac{n!}{n^n}$　　(11) $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$

---

[1] 教科書ではこの部分の証明をサボっているが、証明を考えて欲しい。

[2] $\max E = \alpha$ であるための必要十分条件は $\forall x \in E$ に対して $x \leq \alpha$ でありかつ $\alpha \in E$ となることである。最小値の定義も同様。

[3] ヒント: (2) 加法定理を用いよ。(4) $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ を計算せよ。(7) まず $(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^n \geq \sqrt{n}$ を示せ。(8) まず $(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} < 3$ を示せ。(11) まず $3 < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \sqrt[n]{2} \cdot 3$ を示せ。