基礎ゼミ 1組,2組　　2008年4月28日

19. 次の実数が無理数であることをそれぞれ背理法により示せ。[1]

(1) $\log_2 3$　　(2) $\sqrt{3}$　　(3) $\sqrt[3]{12}$

- **(Archimedes の原理)**
  任意の正の実数 a と任意の実数 b に対して、ある $n \in \mathbf{N}$ が存在して、$an > b$ とできる。

20. Archimedes の原理を用いて、任意の実数 α に対して、ある $n \in \mathbf{Z}$ が唯一つ存在して、$n \leq \alpha < n+1$ とできることを示せ。この n を $[\alpha]$ と表し、α の整数部分という。[2]

21. α を実数とする。Archimedes の原理を用いて、次を示せ。(ヒント: $\alpha \neq 0$ と仮定して矛盾を導け。)

(1) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $|\alpha| < \frac{1}{n} \implies \alpha = 0.$　　(2) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $|\alpha| \leq \frac{1}{n} \implies \alpha = 0.$

(3) ある $b > 0$ があって、$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $|\alpha| < \frac{b}{n}$ ならば $\alpha = 0.$

例題 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0\,,\,1-\frac{1}{n}\right] = [0,1)$ を示す。[3]

証明: "$\subset$" について: $n = 1, 2, \ldots$ を任意に取る。$x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ とすると、$0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$ であるから、$0 \leq x < 1$ となり $x \in [0,1)$. 即ち、$[0, 1-\frac{1}{n}] \subset [0,1)$. 従って、$\cup_{n=1}^{\infty}[0, 1-\frac{1}{n}] \subset [0,1)$.
"$\supset$" について: $x \in [0,1)$ とする。このとき、$n = [\frac{1}{1-x}] + 1$ とすると $n > \frac{1}{1-x}$ より $0 \leq x < 1 - \frac{1}{n}$ となる[4]。従って、$x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, 特に $x \in \cup_{n=1}^{\infty}[0, 1-\frac{1}{n}]$ となるから、$\cup_{n=1}^{\infty}[0, 1-\frac{1}{n}] \supset [0,1)$ を得る。
以上より、与式は証明された。　□

22. 次の集合はどうような集合か。予想し証明せよ。

(1) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1\,,\,3-\frac{1}{n}\right]$　(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\,,\,1\right)$　(3) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(0\,,\,1-\frac{1}{n}\right)$　(4) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}\,,\,1\right]$

(5) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\,,\,1\right)$　(6) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}\,,\,n\right]$　(7) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0\,,\,\frac{1}{n}\right]$　(8) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0\,,\,\frac{1}{n}\right]$

- 集合 A, B に対して、$A + B = \{\, x + y\,;\, x \in A, y \in B \,\}$ と書くこととする。

例題 $A = [0,1]$, $B = [0,1)$ のとき、$A + B = [0,2)$ となる。
証明: "$\subset$" について: $x \in A, y \in B$ とすると、$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y < 1$ より、$0 \leq x + y < 2$ となるから、$x + y \in [0,2)$. 従って、$A + B \subset [0,2)$.
"$\supset$" について: $z \in [0,2)$ とする。$x = \frac{z}{2}, y = \frac{z}{2}$ とおくと[5]、$x \in [0,1) \subset [0,1]$, $y \in [0,1)$ より $z = x + y \in A + B$. 従って、$A + B \supset [0,2)$. 以上より、与式は証明された。　□

23. 次の集合 A, B に対して、$A + B$ はどうような集合か。予想し証明せよ。[6]

(1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 1\}$　(2) $A = \{1, 2\}$, $B = [0,1)$　(3) $A = [-1, 0]$, $B = [0,1]$

(4) $A = [0,1)$, $B = (0,1]$　(5) $A = \{\, \frac{k}{2}\,;\, k \in \mathbf{Z} \,\}$, $B = \{\, \frac{k}{3}\,;\, k \in \mathbf{Z} \,\}$

---

[1] ヒント: 有理数であると仮定して矛盾を導け。(2), (3) は既約分数で表せたとする必要があります。

[2] この問題は難しいので最初は省略してもかまわない。また、それ以降の問題をこの主張を用いて解いてかまわない。解答は例えば、『飯高茂 編 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方 講談社』p.66 にある。

[3] **定義** A, B, A_n, $n = 1, 2, \ldots$, を集合とするとき、次のように定義する。
1) $A \subset B \overset{\text{def}}{\iff}$「$x \in A \Rightarrow x \in B$」　2) $A = B \overset{\text{def}}{\iff}$「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」
3) $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{def}}{\iff}$「ある $n = 1, 2, \ldots$ があって $x \in A_n$」　4) $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{def}}{\iff}$「任意の $n = 1, 2, \ldots$ に対して $x \in A_n$」

[4] いうまでもなく、実際は、$x < 1 - \frac{1}{n}$ とするためには、$n > \frac{1}{1-x}$ であればよいから、$n = [\frac{1}{1-x}] + 1$ と定めた。

[5] x, y のとり方は他にもいろいろある。例えば、$0 \leq z \leq 1$ のとき $x = z, y = 0$, $1 < z < 2$ のとき $x = 1, y = z - 1$ としてもよいし、$x = [z], y = z - [z]$ としてもよい。

[6] ヒント: (5) の答えは $A + B = \{\, \frac{k}{6}\,;\, k \in \mathbf{Z} \,\}$.