基礎ゼミ　1 組,2 組　　2008 年 4 月 21 日　　**平面の方程式、直線の方程式**[1]

- $\boldsymbol{n} = (a,b,c) \neq (0,0,0)$ とする。点 $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ を通り、ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面の方程式は、

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \tag{1}$$

と表される。特に、$ax+by+cz=d$ は平面の方程式となる。このベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ を平面 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ や $ax+by+cz=d$ の**法線ベクトル**という。

証明　これは平面上の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$ とベクトル $\boldsymbol{n}$ が直交しているため、その内積が 0 になることより (1) は従う。次の式は $d=ax_1+by_1+cz_1$ とすれば (1) より得られる。□

9.　次の平面の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $\mathrm{A}(1,2,-1)$, $\mathrm{B}(3,-1,0)$ を結ぶ直線 AB に垂直で、しかも点 $(1,-1,2)$ を通る平面

(2) 点 $\mathrm{A}(2,1,4)$ を通り、x 軸に垂直な平面

(3) 3 点 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(2,3,3)$, $\mathrm{C}(2,-3,-1)$ を通る平面

10.　(1) 平面 $x-2y-z-6=0$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

(2) 点 $(1,2,3)$ から平面 $3x+y-2z+28=0$ までの距離を求めよ。

11.　原点 O から平面 $ax+by+cz=d$ までの距離 p は、$p=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で表わされることを示せ。

12.　次の 3 つの平面を、それぞれ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ とする。

$$2x-3y+4z=0 \qquad 6x-4y-6z=5 \qquad -9x+6y+9z=7$$

(1) 2 平面 $\alpha_1,\ \alpha_2$ は垂直であることを示せ。

(2) 2 平面 $\alpha_2,\ \alpha_3$ は平行であることを示せ。

13.　次の 2 つの平面のなす角 θ を求めよ。ただし、$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $-x+3y-5z=1, \quad 2x-y-z=3$

(2) $x+3y-\sqrt{6}z=3, \quad 2x+2y=3$

- ベクトル $\boldsymbol{k}=(a,b,c)\neq(0,0,0)$ に平行で、点 $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ を通る直線の方程式は、$\boldsymbol{p}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ とするとき、$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{k}$ $(t\in\mathbf{R})$、成分で表わすと

$$x=x_1+at \qquad y=y_1+bt \qquad z=z_1+ct$$

と媒介変数表示される。これから、t を消去し、$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ とも表わされる。このベクトル $\boldsymbol{k}$ を直線の**方向ベクトル**という。

14.　次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $\mathrm{A}(2,0,-1)$ を通り、直線 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ に平行な直線

(2) 2 点 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(2,-1,5)$ を通る直線

(3) 点 $\mathrm{A}(2,-3,5)$ を通り、平面 $x+2y-z=0$ に垂直な直線

(4) 点 $\mathrm{A}(1,2,3)$ を通り、xz 平面に垂直な直線

15.　直線 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+4}{2}$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

16.　2 つの直線 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{4},\quad x-1=\dfrac{2-y}{10}=\dfrac{-z}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ とする。

17.　点 $\mathrm{A}(1,2,-3)$ を通り、2 つの平面 $3x-2y+z=-4$, $x+y-z=1$ に垂直である平面の方程式を求めよ。

18.　(1) 平面 $x+2y+3z=5$ に関して点 $\mathrm{A}(2,1,5)$ と対称な点 A' の座標を求めよ。

(2) その点 A' と点 $\mathrm{B}(6,6,5)$ を結ぶ直線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}$ の方程式と、その直線と上の平面との交点の座標を求めよ。

---

[1] 十数年程前までこれらのことは高校で教えられていた。その名残で最近の大学の教科書でも高校で履修済みとして述べられていない。以下の問題はすべて昭和 58 年度の高校 2 年生向けの教科書からとっている。