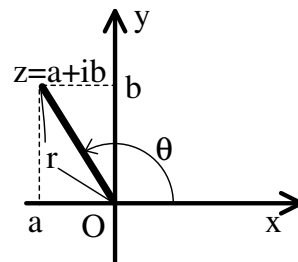


● 複素数平面 (Gauss 平面)

- (1) 複素数 $z = a + ib$ に座標平面上の点 (a, b) を対応させる。
 x 軸を実軸、 y 軸を虚軸という。
 複素数 z に対応する複素数平面上の点 P を $P(z)$ と表す。単に点 z という
 こともある。
- (2) 複素数 $z = a + ib$ の絶対値を $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ で定める。
 これは点 z と原点 O との距離となる。
 特に $|z - w|$ は点 z と点 w の距離となる。



● 複素数の極形式

- (3) 複素数平面上の点 $P(z)$ を OP の長さ r と偏角 θ で表すと、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ となる。これを複素数 z の極形式という。また、 $\theta = \arg z$ と表す。ただし、 $z = 0$ に対しては定義しないものとする。
- (4) 複素数 $\alpha = a + ib$ に対して、 $e^{i\alpha} = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ と定める。(これを Euler の公式という。)
 特に、三角関数の加法定理を用いて $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して、 $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$ がわかる。³

例 $\alpha = 1 + i$ とすると、 $|\alpha| = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2}$, また、 $\alpha = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $\arg \alpha = \frac{\pi}{4}$ を得る。(複素数平面で点 α が $(1, 1)$ に対応することと比較せよ。)

● de Moivre の定理

- (5) 問 4 より、 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, 即ち、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ ($n \in \mathbb{Z}$) を得る。これを de Moivre の定理という。
- (6) (5) より、 $x^n = 1$ の根は、 $e^{2\pi ki/n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) となる⁴。これらの n 個の点は $|z| = 1$ 上 (複素数平面の単位円周上という) にあり、点 1 を一つの頂点とする正 n 角形の頂点になっている。
 $z^n = \alpha$ の根は、複素数平面上の原点 O を中心とする半径 $\sqrt[n]{|\alpha|}$ の円周上にあり、正 n 角形の頂点になっている。即ち、 $\alpha = re^{i\theta}$ であれば、根は $z = r^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) となる。

例 $x^3 = 1$ の根は、 $x = 1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ であるが、 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{2\pi i/3}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = e^{4\pi i/3}$ となっている。
 また、 $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$ の根は、 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\pi i/3}$ より、 $z = \sqrt{2}e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{6} + \pi i} = -\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$ となる。

以上をふまえ、以下の問題を解け。

- 複素数平面上に 3 点 $O, A(5 + 2i), B(1 - i)$ がある。
 2 つの線分 OA, OB が隣り合う 2 辺となるような平行四辺形の残った頂点 C を表す複素数を求めよ。
 また、線分 OA を 1 辺にもち、線分 OB が対角線であるような平行四辺形の残った頂点 D を表す複素数を求めよ。
- $z = \sqrt{3} - i$ のとき、 $z, \bar{z}, \frac{1}{z}, z^3$ の偏角を求めよ。ただし、 $[0, 2\pi)$ の範囲で求めよ。
- 絶対値が 1 で偏角が α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) である複素数 z に対し、 $w = 1 - z$ とおく。 w を極形式で表し、 $|w| = 1$ となるような α の値を求めよ。
- 三角関数の加法定理を用いて $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して、 $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$ を示せ。(ヒント: $\alpha = a + ib, \beta = c + id$ と表し、 $e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d)) = e^a(\cos b + i \sin b) e^c(\cos d + i \sin d)$ を示せばよい。)
- 次の値を求めよ。(a) $(1 + \sqrt{3}i)^8$, (b) $(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i})^{12}$, (c) $(\frac{2}{1-\sqrt{3}i})^6$
- $(\frac{1+\cos \theta + i \sin \theta}{1+\cos \theta - i \sin \theta})^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ ($n \in \mathbb{N}$) を示せ。ただし、 θ は π の奇数倍ではないとする。
- 次の方程式の根を求め、それらを表す点を複素平面上に図示せよ。
 (a) $x^4 = i$, (b) $x^3 = 1 + i$, (c) $x^2 = 2 + i$, (d) $x^2 + 2x = 2 + \sqrt{3}i$.
- $x^5 = 1$ を解くことにより、 $\cos \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

¹4 年前はこれらのことは高校の数学 B で扱われていた。その名残で最近の大学の教科書でも高校で履修済みとして述べられていない。

²以下の内容の多くは、「服部昌夫監修 ニューアクション数学 B 東京書籍 1995 年発行」からとっている。

³以下、 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は、それぞれ自然数、整数、有理数、実数、複素数の全体を表すものとする。

⁴多項式 $p(x)$ に対して、方程式 $p(x) = 0$ の解のことを根という。注意: 解 (solution) というのは日本 (の中学、高校) だけだと思う。