微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 6 回目　出題日 2008 年 1 月 25 日

注意 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s>0)$ の発散・収束などの定理は証明なしに用いても構わない。
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^p r^{n-2}$ $(0<r<1,\ p>0)$ が収束することも証明なしに用いても構わない。

1. 次の正項級数は収束する, 発散するのいずれかを調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

2. 次の級数は絶対収束する, 条件収束する, 発散するのいずれかを調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+2}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^{k-1}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}$ を用いて、$\displaystyle 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$ を示せ。

4. (1) 関数列 $\displaystyle\left\{\frac{1}{1+(x-n)^2}\right\}$ は $(-\infty,\infty)$ 上一様収束するか、また、$(-\infty,\infty)$ 上で広義一様収束するかを調べよ。

(2) 関数列 $\left\{n^a x e^{-nx^2}\right\}$ が $I=[0,1]$ 上で一様収束するような実数 a の範囲を決定せよ。

5. 次の関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx^2}$ が $I=[0,1]$ 上で一様収束するかを調べよ。

6. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ とする。このとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば、$f(x)$ は $I=[-\pi,\pi]$ 上の連続関数であり、$\displaystyle b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$ $(k=1,2,\dots)$ となることを示せ。

7. $-1<x<1$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ が収束し、その和が $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2}$ となる。このことから、$-1<x<1$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ が収束し、その和が $\displaystyle\frac{2}{(1-x)^3}$ となることを示せ。(ヒント: 上の注意の 2 行目を用いよ。)

以上