微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 5 回目　出題日 2008 年 1 月 8 日

1. 次の重積分の広義積分が収束していることを示し、その値を求めよ。ただし、各小問の W に対し、それに収束する増大列を明記していない解答は 0 点とする。

(1) $\displaystyle \iint_W \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} \qquad W = \{\,(x,y) \mid x+y>1,\ 0<x<1\,\}$

(2) $\displaystyle \iiint_W \frac{x^2\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \qquad W = \{\,(x,y,z) \mid 0<x^2+y^2+z^2<1\,\}$

2. $W = \{\,(x,y) \mid 0<x<1, 0<y<1\,\}$ に対して

$$W_n = \left\{\,(x,y) \,\middle|\, \frac{\sqrt{3}}{n}<x<1-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}<y<1-\frac{1}{n}\right\}$$

$$U_n = \left\{\,(x,y) \,\middle|\, \frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n},\ \frac{\sqrt{3}}{n}<y<1-\frac{1}{n}\right\}$$

とすると、$\{W_n\}$, $\{U_n\}$ はともに W に収束する増加列だが、

$$I = \lim_{n\to\infty}\iint_{\bar{W}_n}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \quad と \quad J = \lim_{n\to\infty}\iint_{\bar{U}_n}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

の値が異なることをそれぞれの値を求めることにより示せ。

(実は、$\displaystyle \iint_W \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy = \infty$ となり、$\displaystyle \iint_W \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ は収束しない。)

ヒント: $\displaystyle \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y}\right)$ を計算してみよ。

3. 次の線積分を求めよ。ただし、(2) において C には正の向きが与えられているとする。

(1) $\displaystyle \int_C \big((x^2+y^2)\,dx + y\,dy\big), \qquad C: x=\cos t, y=\sin t,\ (0\le t\le\pi)$

(2) $\displaystyle \int_C \big((x^2+y^2)\,dx + y\,dy\big), \qquad C$ は $y=\sqrt{x}$ と $y=x^2$ の囲む部分の境界

(3) $\displaystyle \int_C \big((x^3-3xy^2)\,dx - (3x^2y-y^3)\,dy\big), \qquad C: x=1+\cos t, y=\sin t,\ (0\le t\le\pi)$

ヒント：$D = \{\,(x,y) \mid (x-1)^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$ として Green の定理を用いよ。

4. 円柱 $x^2+y^2=ax$ の球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ の内部にある部分の曲面積を求めよ。