微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　テスト　　出題日 2007 年 11 月 9 日

1. (1) 三平方の定理から余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を導け。ただし、三角形 ABC において $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$ と定める。

(2) 余弦定理を用いて、ヘロンの公式 $S = \sqrt{m(m-a)(m-b)(m-c)}$ を導け。ここで、S は三辺の長さが a, b, c となる三角形の面積で、$2m = a + b + c$ とする。

2. (1) $f(r)$ は C^2-関数とする。$w = f(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dw}{dr}$$ を示せ。

(2) $z = e^{xy},\ x = \log(s^2+t^2),\ y = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{t}{s}$ のとき、$z_s,\ z_t$ を求めよ。

3. (1) 平面上の各点 (r, θ) で定義された C^1-関数 $z = \varphi(r, \theta)$ が恒等的に $\varphi_\theta = 0$ をみたしていれば、$\varphi(r, \theta)$ は r のみの関数であることを示せ。

(2) $\mathbf{R}^2$ 上の C^1-関数 $f(x, y)$ が恒等的に $yf_x - xf_y = 0$ をみたしていれば、$f(x, y)$ は $\sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数であることを示せ。

4. 関数 $f(x, y) = e^x \,\mathrm{Arcsin}\, y$ に $(0, 0)$ の近傍で $n = 2$ に対して Taylor の定理を適用せよ。

5. 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$ の極値と、それを与える点を求めよ。

6. 閉領域 $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4$ 上の関数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y$ の最大値と最小値と、それを与える点を求めよ。