微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　テスト　　出題日 2007 年 10 月 26 日

1. 次の極限が存在すれば求め、しなければそれを示せ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2y+x^2-y-1}{xy+x-y-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$

2. $(x,y)\to(a,b)$ のとき $f(x,y)$, $g(x,y)$ がそれぞれ A, B に収束するとする。このとき、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\{f(x,y)+g(x,y)\} = A+B$ となることを示せ。

3. 次の関数の (各変数に関する) 偏導関数を求めよ。((1), (2) ともに $x \neq 0$ とする。)

(1) $f(x,y) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$　　(2) $f(x,y) = \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. 関数 $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ に対し、$f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ。

5. $f(x,y) = |xy|^{3/4}$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能だが、C^1-関数ではないことを示せ。

6. $f(x,y) = x^3+2x^2y-xy^2-y^3$ とする。

(1) 点 $(1,-1,-1)$ での $z=f(x,y)$ のグラフの接平面 α を求めよ。

(2) 点 $(1,-1,-1)$ を通り (1) の平面 α に直交する直線 ℓ と xy-平面との交点の座標を求めよ。

(3) (2) の直線 ℓ と xy-平面とのなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2})$ とするとき、$\sin\theta$ の値を求めよ。
(ヒント: xy-平面の法線ベクトルと直線 ℓ の方向ベクトルのなす角が $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ となることを用いよ。)