微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2008 年 2 月 8 日の試験の解答の要点[1]

1 (1) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ とおくと、$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (\frac{n}{n+1})^2 \to 1\ (n\to\infty)$. また、$|x|=1$ のとき、$\sum |\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n| = \sum \frac{1}{n^2}$ より収束するので、このとき与式は絶対収束するので収束する。以上より収束域は $[-1,1]$.

(2) $f(x) = \frac{\log(x+2)}{\log(x+3)}$ とおくと、$x\to\infty$ のとき $\frac{\infty}{\infty}$ で $\frac{(\log(x+2))'}{(\log(x+3))'} = \frac{1/(x+2)}{1/(x+3)} \to 1$ より、L'Hopital の定理により $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. よって、$a_n = \frac{1}{\log(n+2)}$ とすると、$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+2)}{\log(n+3)} = 1$ となるから、収束半径は 1. $x=1$ のとき、$\frac{1}{\log(n+2)} \geq \frac{1}{n+1}\ (n\geq 0)$ で $\sum \frac{1}{1+n}$ は発散するから、このとき与式は発散する。また、$x=-1$ のとき、与式は交項級数で $\{\frac{1}{\log(n+2)}\}$ は単調減少で $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+2)} = 0$ となるから、収束する。以上より収束域は $[-1,1)$.

(3) $x\in(-\infty,\infty)$ を任意をとる。$a_n = |\frac{n!}{(3n)!}x^{3n}|$ とおくと、$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^3}{3(3n+2)(3n+1)} \to 0\ (n\to\infty)$. 従って、d'Alembert の判定法より $\sum a_n$ は収束するので、与式は絶対収束するから収束する。よって、収束域は $(-\infty,\infty)$.

(4) $a_n = 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ とおくと、$1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1+\frac{1}{2n+1}$ で $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n+1}) = 1$ となるから、$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. また、$a_n \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ で $\sum\frac{1}{n}$ は発散するので、$x=\pm1$ のとき $\lim_{n\to\infty}|a_n x^n| = \infty$ となるから、与式は発散する。以上より収束域は $(-1,1)$.

2 (1) $\cos 3x = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x = \cdots = 4\cos^3 x - 3\cos x$. よって、$f(x) := \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) = \frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(3x)^{2n} + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n})$. ここで、右辺の級数の収束半径はともに ∞ であるから、$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^{2n}+3)}{4\cdot(2n)!}x^{2n}$ となる。この収束半径は ∞ となる。

(2) $f(x) = \log(1+2x-3x^2) = \log(1-x)(1+3x) = \log(1-x)+\log(1+3x)$. ただし、定義域は $-\frac{1}{3} < x < 1$ である。従って、$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ (|x|<1)$ であるから、$|3x|<1$ であるとき、$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1-(-3)^n}{n}x^n$. 収束半径は 1/3 である。

3 等比級数の公式 $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\ (|r|<1)$ を用いる。$f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{4-x} = \frac{1}{1+(x-1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(x-1)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\{-(x-1)\}^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{3})^n$. よって、$|(x-1)/3|<1$ かつ $|x-1|<1$ より、$0<x<2$ のとき、$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{1}{3}\frac{1}{3^n}+(-1)^n\}(x-1)^n$. 収束半径は 1 である。

4 (1) $y\neq 0$ のとき、$\int\frac{1}{y}\,dy = -\int\frac{x}{1+x^2}\,dx$ より、$\log|y| = -\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$, 即ち、$y = \frac{\pm e^C}{\sqrt{1+x^2}}$. ここで、$\pm e^C$ を改めて C と書くと、$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$. $y=0$ も解であるが $C=0$ のときとなるので、以上より解は $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$. ($C$ は任意定数。)

(2) $u = \frac{y}{x}$ とおくと $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx}+u$. このとき与式は $-2u(x\frac{du}{dx}+u) = 1+u^2$, 即ち、$2ux\frac{du}{dx} = 1-u^2$ となる。よって、$u\neq\pm1$ のとき $\int\frac{2u}{u^2-1}\,du = -\int\frac{1}{x}\,dx$. (左辺)$=\int\{\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\}\,du = \log|u-1|+\log|u+1|$ より、$\log|u^2-1| = -\log|x|+C$, 即ち、$x(u^2-1) = \pm e^C$. ここで、$\pm e^C$ を改めて C と書くと、$x(u^2-1) = C$. 以上より、$y=x$, $y=-x$ も解であるが $C=0$ のときとなるので、解は $y^2-x^2 = Cx$ となる。

(3) $x\frac{dy}{dx}+y=0$ を解いて、$y = \frac{C}{x}$. 与式の解を $y = \frac{C(x)}{x}$ とおくと、$x\frac{dy}{dx}+y = x(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2})+y = C'(x)$ となるから、$C'(x) = x\log x$. よって、$C(x) = \int x\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C$ となるから、解は $y = \frac{1}{2}x\log x - \frac{1}{4}x + \frac{C}{x}$.

(4) $y\neq 0$ とする。$u = y^{1-2}$ とおくと、$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$ より、$-x\frac{du}{dx}+u = -x^3$. $-x\frac{du}{dx}+u = 0$ を解いて、$u = Cx$. 解を $u = C(x)x$ とおくと、$-x\frac{du}{dx}+u = -x(C'(x)x - C(x))+u = -x^2C'(x)$ となるから、$C'(x) = x$. よって、$C(x) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2+C$ となるから、解は $y = 1/(\frac{1}{2}x^3+Cx)$. $y=0$ も解である。

---

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は **1** (1), (3), (4) が各 6 点、**1** (2), **2**, **3** が各 10 点, **4** が各 8 点で、満点は **90 点**である。