微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2008 年 1 月 25 日の試験の解答の要点[1]

1　(1)　$a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ とおくと、$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)n^{2n}} = (1+\frac{1}{n})^{2n}\frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{e^2}{4}$ $(n \to \infty)$. ここで、$\frac{e^2}{4} > 1$ であるから、d'Alembert の判定法により与式は発散することがわかる。

(2)　$\log(1+x) \geq (\log 2)x$ $(0 \leq x \leq 1)$ より、$n\log(1+\frac{1}{n^2}) \geq n(\log 2)\frac{1}{n^2} = \frac{\log 2}{n}$. ここで、$\sum \frac{1}{n}$ は発散するから、与式は発散する。

2　(1)　$|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ で $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ は収束するので、与式は絶対収束する。

(2)　(与式)$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$ よりこれは交項級数である。さらに、$\{\sin\frac{1}{n}\}$ は単調減少であり 0 に収束するので、与式は収束する。一方、$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ より、$|\sin\frac{(-1)^{n-1}}{n}| = \sin\frac{1}{n} \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}$ で $\sum\frac{1}{n}$ は発散するから、$\sum_{n=1}^{\infty}|\sin\frac{(-1)^{n-1}}{n}|$ は発散する。以上より、与式は条件収束する。

3　$\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^{k-1} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-(-x^2)^n}{1+x^2}$ より、$|\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^{k-1}\,dx - \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx| = |\int_0^1\frac{-(-x^2)^n}{1+x^2}\,dx| \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. 一方、$\int_0^1(-x^2)^{k-1}\,dx = (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$, $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ となるから、$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} - \frac{\pi}{4} \to 0$ $(n \to \infty)$, 即ち、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ を得る。

4　(1) $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$ とおくと、$\forall x \in I := (-\infty,\infty)$ に対して $f(x) := \lim_{n\to 0} f_n(x) = 0$ となる。
一方、$\sup\{|f_n(x) - f(x)|\,|\,x \in I\} = 1$ となるから、$\{f_n(x)\}$ は I 上一様収束しない。
次に $-\infty < a < b < \infty$ とすると、$n > b$ のとき、$A_n := \sup\{|f_n(x) - 0|\,|\,x \in [a,b]\} = \frac{1}{1+(b-n)^2}$ であり、従って、$A_n \to 0$ $(n \to 0)$ となるから、$\{f_n(x)\}$ は I 上広義一様収束する。

(2)　$f_n(x) := n^a xe^{-nx^2}$ とする。問題文の注意の 2 行目より、$x > 0$ のとき $f_n(x) := n^a xe^{-nx^2} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる。($r = e^{-x^2}$ と考える。) また、$x = 0$ なら $f_n(0) = 0$ より $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$
次に $f_n'(x) = n^a(1-2nx^2)e^{-nx^2}$ より、$x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ のとき $f_n(x)$ は最大となるため (厳密には増減表を書く必要があるがここでは略す)、$\sup\{|f_n(x) - 0|\,|\,x \in [0,1]\} = \sup\{f_n(x)\,|\,x \in [0,1]\} = \frac{1}{\sqrt{2e}}n^{a-\frac{1}{2}}$. 従って、$a < \frac{1}{2}$ のとき I 上で一様収束し、$a \geq \frac{1}{2}$ のとき一様収束しない。

5　関数項級数 $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx^2}$ が一様収束したとすると、各 $n \in \mathbf{N}$ に対して xe^{-nx^2} は $[0,1]$ 上で連続なので、$f(x)$ は $[0,1]$ 上で連続となる。一方、$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ であるが、$x > 0$ のとき $f(x) = \frac{xe^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \frac{x}{e^{x^2}-1}$. ここで、$x \to +0$ のとき $e^{x^2} - 1 \to 0$ となるので、右辺は不定形。よって、$\frac{x'}{(e^{x^2}-1)'} = \frac{1}{2xe^{x^2}} \to \infty$ $(x \to +0)$ となるから l'Hopital の定理により $\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$ となる。従って $f(x)$ は $x = 0$ で不連続となり、これは $f(x)$ は $[0,1]$ 上で連続となることに矛盾する。以上より、I 上一様収束しないことがわかった。

6　$x \in [-\pi,\pi]$ に対し $|b_n\sin nx| \leq |b_n|$ で仮定より $\sum|b_n|$ は収束するから、Weierstrass の M-判定法により $\sum b_n\sin nx$ は $[-\pi,\pi]$ 上で一様収束する。ここで、各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $b_n\sin nx$ は連続だから、$f(x)$ も連続となる。
次に、$|b_n\sin nx\sin kx| \leq |b_n|$ であるから、同様に $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\sin kx$ は $[-\pi,\pi]$ 上で一様収束する。従って、項別積分でき、$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\sin kx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\sin kx\,dx$. ここで、$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin kx\,dx = \pi$, $n \neq k$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(n-k)x - \cos(n+k)x)\,dx = 0$ となるので、$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \pi b_k$、即ち、$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$ を得る。

7　$-1 < a < x < b < 1$ とし、$r = \max\{|a|,|b|\}$ とする。$0 < r < 1$ に注意する。$y \in [a,b]$ のとき $|n(n-1)y^{n-2}| \leq n(n-1)r^{n-2}$ で、問題文の注意の 2 行目より $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)r^{n-2}$ は収束するので、Weierstrass の M-判定法により $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ は $[a,b]$ 上一様収束する。ここで、各 $n \geq 1$ のとき nx^{n-1} は微分可能なので、$\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}$ は項別微分可能で、$(\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1})' = \sum_{n=2}^{\infty}(nx^{n-1})' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$.
一方、$(\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1})' = (1 + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1})' = (\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1})' = (\frac{1}{(1-x)^2})' = \frac{2}{(1-x)^3}$ となるので、以上より $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ を得る。

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は **1** (1), (2), **2** (1) が各 5 点、他はすべて各 10 点で、満点は **85 点**である。