微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2008 年 1 月 8 日の試験の解答の要点[1]

1　[10 + 12]　(1)　$W_n=\{(x,y)|1+\frac{1}{n}-x<y<n-x,\,\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}\}$ とおくと、$\{W_n\}$ は W に収束する増大列。$\displaystyle\iint_{\bar{W}_n}\frac{dx\,dy}{(x+y)^2}=\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}dx\int_{1+\frac{1}{n}-x}^{n-x}\frac{dy}{(x+y)^2}=\cdots=\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\Big)(1-\frac{2}{n})$. よって、(与式)$=1$.

(2)　$W_n=\{(x,y,z)|(\frac{1}{n})^2<x^2+y^2+z^2<(1-\frac{1}{n})^2\}$ とおくと、$\{W_n\}$ は W に収束する増大列。$D_n=\{(r,\theta,\varphi)|\frac{1}{n}\le r\le 1-\frac{1}{n},0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le 2\pi\}$ とおくと、写像 $\Phi:(r,\theta,\varphi)\mapsto(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$ により D_n は $\bar{W}_n$ に $\theta=0,\pi,\ \varphi=0,2\pi$ のときを除き一対一に写され、$J_\Phi=r^2\sin\theta>0$ となる。
$\displaystyle\iiint_{\bar{W}_n}\frac{x^2\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\iiint_{D_n}\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{r^4}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}dr\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{4\pi}{3}\Big(1-\frac{2}{n}\Big)$. よって、(与式)$=\dfrac{4\pi}{3}$.

2　[12]　$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y})=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ に注意する。

$$\iint_{\bar{W}_n}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=\int_{\frac{\sqrt{3}}{n}}^{1-\frac{1}{n}}dx\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int_{\frac{\sqrt{3}}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\Big[\frac{y}{x^2+y^2}\Big]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}dx$$
$$=\int_{\frac{\sqrt{3}}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\Big(\frac{1-\frac{1}{n}}{x^2+(1-\frac{1}{n})^2}-\frac{\frac{1}{n}}{x^2+(\frac{1}{n})^2}\Big)\,dx=\Big[\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{1-\frac{1}{n}}-\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{\frac{1}{n}}\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{n}}^{1-\frac{1}{n}}$$
$$=\mathrm{Arctan}\,1-\mathrm{Arctan}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}-\mathrm{Arctan}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{n}}{1-\frac{1}{n}}+\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3}.$$
よって、$I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}-0+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{12}$.

同様に、$\displaystyle\iint_{\bar{U}_n}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=\mathrm{Arctan}\,1-\mathrm{Arctan}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3}}{n}}-\mathrm{Arctan}\,\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}+\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$.
よって、$J=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}-0+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{12}$.

3　[5 + 10 + 10]　(1) (与式)$=\displaystyle\int_0^\pi(-\sin t+\sin t\cos t)\,dt=-2$.

(2)　$C=C_1C_2$, $C_1:x=t,y=t^2$ $(0\le y\le 1)$, $C_2^{-1}:x=t^2,y=t$ $(0\le y\le 1)$ とできるので、
(与式)$=\displaystyle\int_0^1\{(t^2+t^4)+t^2\cdot 2t\}\,dt-\int_0^1\{(t^4+t^2)\cdot 2t+t\}\,dt=-\frac{3}{10}$. (Green の定理を用いてもよい。)

(3)　ヒントの D を用いると D の境界 ∂D は $\partial D=CC_1$, ただし $C_1:x=t,y=0$ $(0\le y\le 2)$, と分解できるので、Green の定理より
(与式)$+\displaystyle\int_{C_1}\big((x^3-3xy^2)\,dx-(3x^2y-y^3)\,dy\big)=\iint_D\big(-\frac{\partial}{\partial y}(x^3-3xy^2)+\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y-y^3)\big)\,dx\,dy=\iint_D(6xy-6xy)\,dx\,dy=0$. よって、(与式)$=\displaystyle-\int_{C_1}\big((x^3-3xy^2)\,dx-(3x^2y-y^3)\,dy\big)=-\int_0^2t^3\,dt=-4$.

4　[14]　$x^2+y^2=ax$ を極座標表示すると $r=a\cos\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ より、円柱は $x=a\cos\theta\cos\theta, y=a\cos\theta\sin\theta, z=t$ と表される。ここで、円柱の球の内部にある部分は $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 即ち、$-a|\sin\theta|\le t\le a|\sin\theta|$ となればよい。以上より、$D=\{(\theta,t)|-a|\sin\theta|\le t\le a|\sin\theta|,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$ とおくと、$\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,t)}\Big)^2+\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,t)}\Big)^2+\Big(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,t)}\Big)^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta=a^2$ より、求める表面積 S は、$\displaystyle S=\iint_D a\,d\theta\,dt=a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{-a|\sin\theta|}^{a|\sin\theta|}dt=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\,d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=4a^2$.

(別解) $y\ge 0,z\ge 0$ の部分を求めて 4 倍すればよい。曲面は $y=f(x,z)=\sqrt{ax-x^2}$, $D=\{(x,z)\,|\,0<z<\sqrt{a^2-ax},0<x<a\}$ と表されるので、$\displaystyle S=4\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_z^2}\,dx\,dz=4\iint_D\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\,dx\,dz$ となる[2]。そこで、$D_n=\{(x,z)\,|\,\frac{1}{n}\sqrt{a^2-ax}<z<(1-\frac{1}{n})\sqrt{a^2-ax},\frac{a}{n}<x<a(1-\frac{1}{n})\}$ とすれば $\{D_n\}$ は D に収束する増大列になり、これを用いて広義重積分を計算すれば (計算は略す) $S=4a^2$ が得られる。

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **73 点**である。
[2] S の式右辺は広義重積分である。このため D を閉領域ではなくあえて上記のような表示にした。(その意味で教科書の解答は誤り。)