微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2007 年 12 月 14 日の試験の解答の要点[1]

1　D を図示することを (特に (1), (2) について) 強く勧めるのだが、ここでは略す。

(1)　D を縦線閉領域として表すと $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2-2x, 0\le x\le 1\}$ となるから、
(与式)$=\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} xy\,dy=\int_0^1\Big[\frac{1}{2}xy^2\Big]_0^{2-2x}dx=\int_0^1 2x(1-x)^2\,dx=\frac{1}{6}.$

(2)　$D=\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4x-x^2}\le y\le\sqrt{4x-x^2}, 0\le x\le 4\}$ となるから、
(与式)$=\displaystyle\int_0^4\sqrt{x}dx\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}dy=\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx=\int_0^4(4-t)\sqrt{t}\,dt=\frac{256}{15}.$

(3)　$V=\{(x,y,z)\,|\,(y,z)\in V(x), 0\le x\le 2\}$ ただし $V(x)=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 4-x^2\}$ と表せ、$V(x)$ の面積は $\pi(4-x^2)$ となるから、(与式)$=\displaystyle\int_0^2 x\,dx\iint_{V(x)}dy\,dz=\int_0^2\pi x(4-x^2)\,dx=4\pi.$

(4)　$D=\{(r,\theta)\,|\,1\le r\le 2, 0\le\theta\le\pi/2\}$ は写像 $\Phi:(r,\theta)\mapsto(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ により D は E に一対一で写され、$J_\Phi=r>0$ となるから、(与式)$=\displaystyle\iint_D(\log r^2)r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^2 2r\log r\,dr=\frac{\pi}{2}(4\log 2-\frac{3}{2}).$

(5)　$W=\{(s,t,u)\,|\,1\le s\le e, 0\le t\le 1, 0\le u\le 1\}$ とおくと、写像 $\Phi:(x,y,z)\mapsto(s,t,u)=(2x+y, x+y-z, y+z)$ により V は W に写され、$J_\Phi=3$ となるからこれは一対一で、Φ の逆写像 Φ^{-1} について $J_{\Phi^{-1}}=1/3>0$ となる。よって、(与式)$=\displaystyle\iiint_W u\log s\,\frac{1}{3}\,ds\,dt\,du=\frac{1}{3}\int_1^e ds\int_0^1 dt\int_0^1 u\log s\,du=\frac{1}{6}.$

2　$D=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 1, 0\le x\le 1\}$ とおくと、D は横線閉領域として $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\sqrt{y}, 0\le y\le 1\}$ と表されるので、(与式)$=\displaystyle\iint_D x^3e^{-y^3}\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}x^3e^{-y^3}\,dx=\int_0^1\frac{1}{4}y^2e^{-y^3}\,dy=\frac{e-1}{12e}.$

3　(1) $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}, (x,y)\in D\}$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x\}$ より、
$\displaystyle m(V)=\iint_D dx\,dy\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz=\iint_D 2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy.$
ここで、$E=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta, -\pi/2\le\theta\le\pi/2\}$ とすると写像 $\Phi:(r,\theta)\mapsto(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ により E は D に $r=0$, $\theta=\pm\pi/2$ のときを除き一対一で写され[2]、$J_\Phi=r>0$ $(r\ne 0)$ となるから、

$$m(V)=\iint_E 2\sqrt{4-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}2r\sqrt{4-r^2}\,d\theta=\frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\theta|^3)\,d\theta$$
$$=\frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\Big(1-\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}\Big)\,d\theta=\frac{16}{3}\pi-\frac{64}{9}.$$

(2)　$W=\{(s,t,u)\,|\,s^2+t^2+u^2\le 1, s\ge 0, t\ge 0, u\ge 0\}$ とおくと、写像 $\Phi:(s,t,u)\mapsto(x,y,z)=(s^3,t^3,u^3)$ により W は V に一対一に写され、$J_\Phi=27s^2t^2u^2$ となる。更に、$U=\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le\varphi\le\pi/2\}$ とおくと、写像 $\Psi:(r,\theta,\varphi)\mapsto(s,t,u)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ により U は W に $r=0$, $\theta=0$ のときを除き一対一に写され、$J_\Psi=r^2\sin\theta$ となる。[3]

$$m(V)=\iiint_V dx\,dy\,dz=\iiint_W 27s^2t^2u^2\,ds\,dt\,du=\iiint_U 27r^6\sin^4\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$
$$=27\int_0^1 r^8\,dr\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=3(I_5-I_7)(I_2-I_4)=\cdots=\frac{\pi}{70}.$$

---

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は **1**, **2** が各 8 点、**3** (1) 12 点, (3) 15 点の、満点 **75 点**である。

[2]今回の試験では「$\cdots$ を除き」の部分が正しく明記されていなくても減点はしなかった。他の問題も同様とした。

[3]はじめから、U から V への写像 $\Phi:(r,\theta,\varphi)\mapsto(x,y,z)=((r\sin\theta\cos\varphi)^3, (r\sin\theta\sin\varphi)^3, (r\cos\theta)^3)$ を考えてもよいが、J_Φ の計算は大変であるので、上記のように迂回できるようヒントをつけた。