微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2007 年 11 月 30 日のテストの解答の要点[1]

1 [10] (1) $\varphi' = \frac{x^2-2xy}{x^2-y^2}$ より、$\varphi' = 0$ を $f(x,y)=0$ と連立させて解いて $(x,y) = (0, -\sqrt[3]{3}), (2,1)$ を得る。更に、$f=0$ を 2 回微分して $6x - 6y - 12xy' - 3x^2y'' + 6y(y')^2 + 3y^2y'' = 0$. これより、$y'=0$ なら $y'' = \frac{2x-2y}{x^2-y^2}$ となるから、$\varphi''(0) = -2\cdot 3^{-1/3} < 0$, $\varphi''(2) = 2/3 > 0$ となる。
以上より、$x=0$ のとき極大値 $-\sqrt[3]{3}$, $x=2$ のとき極小値 1 をとる。

2 [4 + 3 + 5] (1) $\varphi_x(x,y) = -\frac{x}{2z}$, $\varphi_x(x,y) = -\frac{y}{2z}$.

(2) (1) より、$\varphi_x(1,-1) = -1/2$, $\varphi_y(1,-1) = 1/2$ となるから、$z-1 = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y+1)$.

(3) (2) の平面を整理すると $x - y + 2z = 4$. よって、点 A$'$ は方向ベクトル $(1,-1,2)$ で $(0,2,0)$ を通る直線上にあるので A$'(t, -t+2, 2t)$ とできる。このとき、A, A$'$ の中点 $(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}+2, t)$ が平面 α 上にあるので、$\frac{t}{2} - (-\frac{t}{2}+2) + 2t = 4$. これを解いて $t=2$ となるから、A$'(2,0,4)$ となる。

3 [6 + 4] (1) $x_u = \frac{u}{u^2+v^2}$, $x_v = \frac{v}{u^2+v^2}$, $y_u = \frac{-v}{u^2+v^2}$, $y_v = \frac{u}{u^2+v^2}$ となるので、

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

(2) $z_x = z_u u_x + z_v v_x = 2uv$, $z_y = z_u u_y + z_v v_y = u^2 - v^2$.

4 [12] $D = \{(x,y) \mid |x| \le 2, |y| \le 2\}$ とすると、D の境界で $\varphi(x,y) = 0$ とならない。また、$\varphi_x = \varphi_y = 0$ とすると $(x,y) = (0,0)$ であるから、$\varphi(x,y)=0$ とならない。そこで、$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ とすると、$F_x = 1 + 2\lambda x$, $F_y = -4y + 4\lambda y^3$. $F_x = F_y = F = 0$ を連立させて解くと、$F_y = 0$ より $y = 0$ または $\lambda > 0$ かつ $y = \pm\lambda^{-1/2}$. $y=0$ なら $x = \pm 1, \lambda = \mp 1/2$. $y = \pm\lambda^{-1/2}$ なら $x = -\frac{1}{2\lambda}$ より $\lambda = (5/4)^{1/2}$, $x = -(1/5)^{1/2}$, $y = \pm(4/5)^{1/4}$. 以上より、$(x,y,\lambda) = (1,0,-\frac{1}{2}), (-1,0,\frac{1}{2}), (-(1/5)^{1/2}, \pm(4/5)^{1/4}, (5/4)^{1/2})$. このとき $f(x,y)$ の値は順に $1, -1, -\sqrt{5}$ となるから、$(x,y) = (1,0)$ のとき最大値 1 を、$(x,y) = (-(1/5)^{1/2}, \pm(4/5)^{1/4})$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$ をとる。

[別解] $x = \cos\theta$, $y^2 = \sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$ とできるので、$F(\theta) = \cos\theta - 2\sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$ の最大値、最小値を求めてもできる。(最大値、最小値だけでなく、そのときの (x,y) の値まで求めることができた場合のみ正解とした。)

5 [16] $D = \{(x,y) \mid |x| \le 3, |y| \le 3, |z| \le 3\}$ とすると、D の境界で $\varphi(x,y,z) = 0$ とならない。また、$\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ とすると $(x,y,z) = (0,0,0)$ であるから、$\varphi(x,y,z) = 0$ とならない。そこで、$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$ とすると、$F_x = 4y + 8\lambda x$, $F_y = 4x + 2\lambda y$, $F_z = 1 + 2\lambda z$. $F_x = F_y = 0$ より、$x = 0$ または $\lambda = \pm 1$. $x = 0$ なら $z = \pm 2$, $\lambda = \mp\frac{1}{4}$. $\lambda = 1$ なら $2x + y = 0$ で $z = -\frac{1}{2}$ より $x = \pm\frac{\sqrt{30}}{8}$, $y = \mp\frac{\sqrt{30}}{4}$. $\lambda = -1$ なら $2x - y = 0$ で $z = \frac{1}{2}$ より $x = \pm\frac{\sqrt{30}}{8}$, $y = \mp\frac{\sqrt{30}}{4}$. 以上より、$(x,y,z,\lambda) = (0,0,2,-\frac{1}{4}), (0,0,-2,-\frac{1}{4}), (\pm\frac{\sqrt{30}}{8}, \mp\frac{\sqrt{30}}{4}, -\frac{1}{2}, 1), (\pm\frac{\sqrt{30}}{8}, \pm\frac{\sqrt{30}}{4}, \frac{1}{2}, -1)$. このとき $f(x,y)$ の値は順に $2, -2, -\frac{17}{4}, \frac{17}{4}$ となるから、$(x,y,z) = (\pm\frac{\sqrt{30}}{8}, \pm\frac{\sqrt{30}}{4}, \frac{1}{2})$ のとき最大値 $\frac{17}{4}$ を、$(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{30}}{8}, \mp\frac{\sqrt{30}}{4}, -\frac{1}{2})$ のとき最小値 $-\frac{17}{4}$ をとる。(各括弧内では複合は同順で考えるものとする。)

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **60 点**である。