微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2007 年 11 月 9 日のテストの解答の要点[1]

1 [5×2] (1) A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、三平方の定理により $\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2$. ここで、$\mathrm{CH}=|b\cos C|$, $\mathrm{BH}=|a-b\cos C|$. よって、$c^2-(a-b\cos C)^2=b^2-(b\cos C)^2$ となる。これを整理して $c^2=a^2+b^2-2ab\cos \mathrm{C}$ を得る。

(2) $S^2=(\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C})^2=\frac{1}{4}a^2b^2\{1-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2\}=\cdots=\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=m(m-a)(m-b)(m-c)$. よって、与式を得る。

2 [$7+6$] (1) $w_x=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$, $w_{xx}=f''(r)(\frac{\partial r}{\partial x})^2+f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=f''(r)(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})^2+f'(r)(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$. 同様に、$w_{yy}=f''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$,
$w_{zz}=f''(r)\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$ より、
$w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}=f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}+f'(r)(\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

(2) $z_s=z_xx_s+z_yy_s=e^{xy}(y\cdot\frac{2s}{s^2+t^2}-x\cdot\frac{t}{s^2+t^2})$. $z_t=z_xx_t+z_yy_t=e^{xy}(y\cdot\frac{2t}{s^2+t^2}+x\cdot\frac{s}{s^2+t^2})$.

3 [5×2] (1) $\forall\theta_1,\theta_2$ に対して平均値の定理により $0<u<1$ があって、$\varphi(r,\theta_2)-\varphi(r,\theta_1)=(\theta_2-\theta_1)\varphi_\theta(r,\theta_1+u(\theta_2-\theta_1))=0$ となるから、$\varphi(r,\theta_1)=\varphi(r,\theta_2)$.

(2) $\varphi(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ とおくと、$\varphi_\theta=f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)(-r\sin\theta)+f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)r\cos\theta=-f_x(x,y)y+f_y(x,y)x=0$. よって、(1) より $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数となる。

4 [7] $f_x=f_{xx}=e^x\,\mathrm{Arcsin}\,y$, $f_y=f_{xy}=e^x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $f_{yy}=e^x\frac{y}{(1-y^2)^{3/2}}$ により、$f(s,t)=0+s\cdot 0+t\cdot 1+\frac{1}{2}(s^2e^{\theta s}\,\mathrm{Arcsin}\,\theta t+2ste^{\theta s}\frac{1}{\sqrt{1-(\theta t)^2}}+t^2e^{\theta s}\frac{\theta t}{(1-(\theta t)^2)^{3/2}})=t+\frac{1}{2}e^{\theta s}(s^2\,\mathrm{Arcsin}\,\theta t+2st\frac{1}{\sqrt{1-(\theta t)^2}}+t^2\frac{\theta t}{(1-(\theta t)^2)^{3/2}})$.

5 [10] $f_x=4x^3-2x+2y$, $f_y=4y^3+2x-2y$, $f_{xx}=12x^2-2$, $f_{xy}=2$, $f_{yy}=12y^2-2$.
$f_x=f_y=0$ を解いて $(x,y)=(0,0),(1,-1),(-1,1)$.
$(x,y)=(1,-1)$ のとき、$f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}<0$, $f_x=10$ より、このとき極小値 -2,
$(x,y)=(-1,1)$ のとき、$f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}<0$, $f_x=10$ より、このとき極小値 -2.
$(x,y)=(0,0)$ のとき、$f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=0$ であるが、$f(s,0)=s^4-s^2=s^2(s^2-1)<0$ $(0<|s|<1)$, 一方、$f(s,s)=2s^2>0$ $(s\neq 0)$ となるので、$(0,0)$ の近くで $f(x,y)$ は正にも負にもなるのでこれは極値ではない。

6 [10] $f_x=2x+y-4$, $f_y=x+2y-5$, $f_{xx}=2$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=2$. $f_x=f_y=0$ を解いて $(x,y)=(1,2)$. このとき、$f_x=2$, $f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=1-2^2<0$ より極小値 -7 をとる。次に境界上で考える。
$\{(x,0)|0\le x\le 4\}$ 上では $f(x,0)=(x-2)^2-4$ より、$x=2$ で最小値 -4, $x=0,4$ で最大値 0.
$\{(x,4-x)|0\le x\le 4\}$ 上では $f(x,4-x)=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}$ より、$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{4}$, $x=4$ で最大値 0. $\{(0,y)|0\le y\le 4\}$ 上では $f(x,0)=(y-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$ より、$y=\frac{5}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{4}$, $y=0$ で最大値 0.
以上より、$(x,y)=(0,0),(4,0)$ で最大値 0, $(x,y)=(1,2)$ で最小値 -7 となる。

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **60 点**である。