微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2007 年 10 月 26 日のテストの解答の要点[1]

1 [5×4] (1) (与式)$=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x^2-1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x+1)=2.$

(2) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ $(r>0, 0\le\theta<2\pi)$ とおくと、$(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$. このとき、$\frac{\sin xy}{x^2+y^2}=\frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r^2}\to\cos\theta\sin\theta$ $(r\to 0)$ となる。よって θ のとり方により値が変化するので極限は存在しない。

(3) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ $(r>0, 0\le\theta<2\pi)$ とおくと、$(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$ で、$|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}|=|\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}|\le 2r\to 0$ $(r\to 0)$ となるので、(与式)$=0$.

(4) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ $(r>0, 0\le\theta<2\pi)$ とおくと、$(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$ で、$0\le\frac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}=\frac{\sin r^2}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}$. ここで、$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ のとき、$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\ge 1$ より、すべての θ に対して $|\cos\theta|+|\sin\theta|\ge 1$. よって、$0\le\frac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}\le r\frac{\sin r^2}{r^2}\to 0 (r\to 0)$ となるので、(与式)$=0$ となる。

2 [5] $\varepsilon>0$ を任意にとる。仮定よりある $\delta>0$ があって、$0<d((x,y),(a,b))<\delta\Rightarrow|f(x,y)-A|<\frac{\delta}{2}$, $0<d((x,y),(a,b))<\delta\Rightarrow|g(x,y)-B|<\frac{\delta}{2}$ とできる。よって、$0<d((x,y),(a,b))<\delta$ ならば $|\{f(x,y)+g(x,y)\}-(A+B)|\le|f(x,y)-A|+|g(x,y)-B|<\varepsilon$ となり、主張を得る。

3 [$4+6$] (1) $f_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $f_y=\frac{x}{x^2+y^2}$. (2) $f_x=-\frac{x}{|x|}\frac{y}{x^2+y^2}$, $f_y=\frac{|x|}{x^2+y^2}$.

4 [10] $(x,y)\ne(0,0)$ のとき、$f_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$. $f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{0}=0$, 同様に $f_y(0,0)=0$. よって、$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\cdot k\frac{0^2-k^2}{0^2+k^2}=-1$, $f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\frac{h^2-0^2}{h^2+0^2}=1$.

5 [10] 全微分可能であること。$C(x,y)=\frac{|xy|^{3/4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y)\ne(0,0))$, $C(0,0)=0$ とおくと、$|C(x,y)|\le\frac{|(x^2+y^2)/2|^{3/4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x^2+y^2|^{1/4}}{2^{3/4}}\to 0$ $((x,y)\to(0,0))$ であり、$f(x,y)=f(0,0)+0(x-0)+0(y-0)+d((x,y),(0,0))C(x,y)$ とできるので、$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能。
C^1-関数でないこと。$x>0$ のとき $f_x(x,y)=\frac{3}{4}x^{-1/4}|y|^{3/4}$. また、$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(0-0)=0$.
一方、$f_x(t^3,t)=\frac{3}{4}$ $(t>0)$ となるので、$f_x(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続ではないので C^1-関数ではない。

6 [5×3] (1) $f_x(1,-1)=-2, f_y(1,-1)=1$ より、求める平面の方程式は $z+1=-2(x-1)+y+1$.

(2) (1) より α: $2x-y+z=2$ と変形できるので、直線 ℓ は $(1,-1,-1)$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{k}=(2,-1,1)$ となるのでその方程式は $x=1+2t$, $y=-1-t$, $z=-1+t$. これと xy-平面 $z=0$ との交点は $z=-1+t=0$ のときだから $t=1$ を代入して、交点は $(3,-2,0)$.

(3) xy-平面の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ であるから、ヒントより $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$. よって、$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **70 点**である。