

7. 微分方程式の初等解法

微分方程式とは独立変数と未知関数、そしてその導関数からなる方程式のことをいう。 x を独立変数、 $y = y(x)$ を未知関数とすると、一般に、関数 F を用いて

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1}$$

で与えられる。これを(常)微分方程式といい、導関数の最高階数 n をこの微分方程式の階数という。この式をみたく C^n 級関数 $y(x)$ をその解という。¹ 特に $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ と表せるとき正規形という。

例えば、 $y^2 = \log|x| + C$ (C は任意の定数) で定められる y は、1階微分方程式 $2xyy' = 1$ の解である。また、 A, B を任意の定数として、 $x = Ae^t + Be^{2t}$ は2階微分方程式 $x'' - 3x' + 2x = 0$ の解である。

n 階微分方程式の解で、 n 個の任意定数を含むものを一般解、任意定数の一部またはすべてに値を代入して得られる解を特殊解、一般解でも特殊解でもない解を特異解という。

与えられた微分方程式から出発して、四則演算、微分・積分、関数の合成および逆関数を作る操作、初等関数への代入、およびそれらの有限回の組み合わせによって一般解が求められるとき、そのような解き方を初等解法または求積法という。ここでは、初等解法のいくつかを紹介する。

(I) 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

のような方程式を変数分離形という。これは、 $g(y) \neq 0$ のとき $\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$ の両辺を積分して、

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

となり、これから一般解を得る。

例題 7.1 次の微分方程式を解け。

(1) $x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1)y' = 0$ (2) $y' = x(1 - y^2)$

解: (1) $\int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = - \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ より、

$$\log(y^2 + 1) = -\log(x^2 + 1) + C$$

よって、 $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = e^C$. e^C を改めて C とおけば、一般解は $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C$ となる。

(2) $y \neq \pm 1$ のとき、 $\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int x dx$ より、

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = \frac{1}{2} x^2 + C$$

これから、 $\frac{1 + y}{1 - y} = \pm e^{2C} e^{x^2}$ となる。 $\pm e^{2C}$ を任意定数 C におき直し整理することで、 $y = \frac{Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1}{Ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1}$ を得る。($C \neq 0$ に注意。) また、 $y = 1, y = -1$ も明らかに解である。(それぞれ $C = \infty, 0$ の場合になっている。) □

問題 7.1 次の微分方程式を解け。²

(1) $2xy' = y$ (2) $xyy' - x^2 = 3$ (3) $xy' = y - 1$ (4) $(x - 1)y' + y - 1 = 0$
 (5) $(\cos^2 x)y' + \sin x \cos^2 y = 0$ (6) $(1 + x)y + x(1 - y)y' = 0$

¹このノートは『坂光一他著 微分積分学入門 学術図書』をもとに書きました。演習問題の多くもそこからとってます。

²問題 7.1 解答: (1) $y = C\sqrt{|x|}$, (2) $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + 3\log|x| + C$, (3) $y - 1 = Cx$, (4) $(x - 1)(y - 1) = C$,

(5) $\tan y = -\frac{1}{\cos x} + C, y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$), (6) $xye^{x-y} = C$

(II) 同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形にかけられる方程式を同次形という。これは、 $u = y/x$ とおくと、 $y = ux$ より $u'x + u = y' = f(u)$, すなわち

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

となり、変数分離形に帰着できる。

例題 7.2 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ を解け。

解: $x > 0$ とする。 $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ であるから、 $u = y/x$ とおくと、 $u + xu' = u + \sqrt{1 + u^2}$. よって、

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{i.e.,} \quad \log(u + \sqrt{1 + u^2}) = \log x + c.$$

もとの y にもどすと、 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = kx^2$. ($k = e^c > 0$: 任意常数.) 両辺に $\sqrt{x^2 + y^2} - y$ をかけると、 $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 1/k$ を得るから、

$$y = \frac{1}{2} \left(kx^2 - \frac{1}{k} \right), \quad (k > 0: \text{任意定数}) \quad (7.2)$$

を得る。 $x < 0$ のときは $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ であるから、同様に (7.2) が解であることがわかる。また、 $x = 0$ のとき $y < 0$ であり問題式の両辺ともに 0 となるので、(7.2) が求める解である。 □

問題 7.2 次の微分方程式を解け。³

$$(1) \quad xyy' = x^2 + y^2 \quad (2) \quad x + yy' = 2y \quad (3) \quad (x+y) + (x-y)y' = 0 \quad (4) \quad y^2 + x^2y' = xyy'$$
$$(5) \quad x \cot \frac{y}{x} - y + xy' = 0 \quad (6) \quad \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \right) y - \left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x} \right) xy' = 0$$

問題 7.3 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\alpha x + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ ($\alpha\beta - \alpha b \neq 0$) は $am + bn + c = 0$, $\alpha m + \beta n + \gamma = 0$ なる m, n に対して $x = s + m, y = t + n$ と変数変換すると、

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt/dx}{ds/dx} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{as + bt}{\alpha s + \beta t}\right) = f\left(\frac{a + bt/s}{\alpha + \beta t/s}\right)$$

となり同次形である。このことを用いて次の微分方程式を解け。⁴

$$(1) \quad (2x - y + 3) - (x - 2y + 3)y' = 0 \quad (2) \quad (3x + y - 5) - (x - 3y - 5)y' = 0$$

(III) 1 階線形方程式 (定数変化法)

$$y' = p(x)y + q(x) \quad (7.3)$$

解法: まず $q(x) = 0$ とし、 $y' = p(x)y$ を解くと $y = Ce^{\int p(x) dx}$ を得る。ここで、(7.3) を解くために C を x の関数と考え、

$$y = C(x)e^{\int p(x) dx} \quad (7.4)$$

とおき、これを (7.3) に代入する:

$$y' = C'(x)e^{\int p(x) dx} + C(x)e^{\int p(x) dx}p(x) = C'(x)e^{\int p(x) dx} + p(x)y.$$

即ち、 $C'(x) = q(x)e^{-\int p(x) dx}$ を得る。よって、両辺を積分し (7.4) に代入することで、(7.3) の一般解を得る。 □

³問題 7.2 解答: (1) $y^2 = 2x^2(\log|x| + C)$, (2) $y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$, $y = x$, (3) $y^2 - 2xy - x^2 = C$, (4) $ye^{-y/x} = C$, (5) $\cos \frac{y}{x} = Cx$, (6) $xy \cos \frac{y}{x} = C$

⁴問題 7.3 解答: (1) $(y - 1)^2 - (x + 1)(y - 1) + (x + 1)^2 = C$, (2) $\frac{3}{2} \log\{(x - 2)^2 + (y + 1)^2\} - \text{Arctan} \frac{y+1}{x-2} = C$,

例題 7.3 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{1+x} + \cos x$ を解け。

解: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{1+x}$ を解いて、 $y = \frac{C}{1+x}$. よって、 $y = \frac{C(x)}{1+x}$ とおくと、

$$y' = \frac{C'(x)}{1+x} - \frac{C(x)}{(1+x)^2} = \frac{C'(x)}{1+x} - \frac{y}{1+x}.$$

故に、 $C'(x) = (1+x)\cos x$ となるから両辺を積分して、 $C(x) = (1+x)\sin x + \cos x + C$ となり、

$$y = \sin x + \frac{\cos x}{1+x} + \frac{C}{1+x} \quad (C: \text{任意定数})$$

を得る。□

問題 7.4 次の微分方程式を解け。⁵

$$(1) \quad y' - y = \sin x \quad (2) \quad y' - 2y = e^{3x} \quad (3) \quad y' + y = x^2$$

$$(4) \quad y' \cos x + y \sin x = 1 \quad (5) \quad xy' + y = x \log x$$

例 7.1 (Bernoulli の方程式)

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

$\alpha = 0, 1$ のときはそれぞれ 1 階線形方程式、変数分離形なので除外してある。

この方程式は $u = y^{1-\alpha}$ とおくと、

$$u' = (1-\alpha)p(x)u + (1-\alpha)q(x)$$

と変形でき、1 階線形方程式に帰着できる。

例題 7.4 $x^2y' = xy + y^3$ を解け。

解: $y \neq 0$ とする。 $u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと、 $u' = -2y^{-3}y'$ より、1 階線形方程式 $x^2u' = -2xu - 2$ を得る。次に $x^2u' = -2xu$ を解いて、 $u = Cx^{-2}$. よって、 $u = C(x)x^{-2}$ とおくと、

$$x^2u' = x^2 \left(-\frac{2C(x)}{x^3} + \frac{C'(x)}{x^2} \right) = -2xu + C'(x).$$

故に、 $C'(x) = -2$ となるから両辺を積分して、 $C(x) = -2x + C$ となり、これを代入して、

$$\frac{1}{y^2} = u = \frac{-2x + C}{x^2} \quad (C: \text{任意定数})$$

を得る。また、 $y = 0$ も明らかに解である。□

問題 7.5 次の微分方程式を解け。⁶

$$(1) \quad x^3y' = xy + y^2 \quad (2) \quad y' + \frac{y}{x} = 2y^2 \log x \quad (3) \quad y' + y = xy^3$$

例 7.2 (Riccati の方程式) $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

一般に、Riccati の方程式には初等解法はないが、何らかの方法で一つの解 $y_0(x)$ がみつければ、次のように一般解が求められる。

⁵問題 7.4 解答: (1) $y = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + Ce^x$, (2) $y = e^{3x} + Ce^{2x}$, (3) $y = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$, (4) $y = \sin x + C \cos x$, (5) $y = \frac{1}{2}x \log x - \frac{1}{4}x + \frac{C}{x}$

⁶問題 7.5 解答: (1) $\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - 1 + Ce^{1/x}$, $y = 0$, (2) $y = \frac{1}{x(C - (\log x)^2)}$, $y = 0$, (3) $\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$, $y = 0$

$y = u + y_0(x)$ として方程式を書き直すと

$$u' + y_0' = p(u + y_0)^2 + q(u + y_0) + r = pu^2 + (2py_0 + q)u + (py_0^2 + qy_0 + r)$$

となるが、 $y_0(x)$ は解だから上式両辺の最後の項が消え、Bernoulli 型方程式 ($\alpha = 2$) に帰着できることがわかる。

例題 7.5 $y' + \frac{x-2}{x-x^2}y + \frac{1}{x^2-x^3}y^2 = 0$ を解け。

解: $y = x$ は明らかに解である。これより、 $y = u + x$ とおくと

$$u' + 1 = -\frac{x-2}{x-x^2}(u+x) - \frac{1}{x^2-x^3}(u+x)^2 = -\frac{1}{1-x}u - \frac{1}{x^2-x^3}u^2 + 1$$

これは Bernoulli 型なので、 $z = u^{1-2}$ とおくと z は $z' = \frac{1}{1-x}z + \frac{1}{x^2-x^3}$ を満たす。これは 1 階線形方程式だから定数変化法で解けて $z = \frac{1+Cx}{x(x-1)}$ を得る。よって、求める解は $y = x$ と $y = z^{-1} + x = \frac{x^2(1+C)}{1+Cx}$ (C は任意定数)。□

問題 7.6 次の微分方程式を解け。⁷ (ヒント (1) $y = 1$, (2) $y = \frac{1}{2}e^x$ が特殊解.)

$$(1) \quad y' + \frac{x}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1}y + y^2 = 0 \qquad (2) \quad y' + e^{2x} - \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 = 0$$

(IV) 2 階線形方程式

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$$

は一般には求積できないが、もし一つの特解 $y = \varphi(x)$ が見つければ、 $y = \varphi(x)z$ によって、 y から z に変換すれば z' の 1 階線形方程式に帰着できるので、完全に解決される。

例題 7.6 $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ を解け。

解: 一つの解として、 $y = x$ がとれる。そこで $y = xz$ とおくと、 $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ だから

$$x(1-x^2)z'' + 2(1-2x^2)z' = 0 \quad \text{即ち} \quad z'' = -\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)z'$$

これを z' の 1 階方程式として解いて、

$$z' = \frac{c_1}{x^2(x^2-1)} = c_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x^2} \right\}.$$

これから、 $z = c_1 \left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{x} \right\} + c_2$ である。よって、解は $y = c_1 \left\{ \frac{x}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 \right\} + c_2x$ 。□

問題 7.7 次の方程式の一つの解をみつけて、一般解を求めよ。⁸

$$(1) \quad (1+x^2)y'' - xy' + y = 0 \qquad (2) \quad (x^2+3x+4)y'' + (x^2+x+1)y' - (2x+3)y = 0$$

⁷問題 7.6 解答: (1) $\frac{1}{y-1} = \frac{\frac{1}{2}x^2-x+C}{x-1}$, $y = 1$, (2) $\frac{1}{y-\frac{1}{2}e^x} = \frac{2}{3}e^{-x} + Ce^{-x-\frac{3}{2}e^x}$, $y = \frac{1}{2}e^x$.

⁸問題 7.7 解答 (順に特解と一般解): (1) x , $c_1(-\sqrt{1+x^2} + x \log(x + \sqrt{1+x^2})) + c_2x$, (2) e^{-x} , $c_1(x^2+x+3) + c_2e^{-x}$.