微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2007 年 10 月 19 日[1]

§ 4.3 **連鎖律**の補足問題 [2]

3.　(1)　$z = \log(x^2+y^2)$,　$x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ のとき、dz/dt を求めよ。

(2)　$z = \mathrm{Arcsin}(x/y)$,　$x = \log t$, $y = e^t$ のとき、dz/dt を求めよ。

(3)　$w = \mathrm{Arctan}(x^2+y^2+z^2)$,　$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ のとき、dw/dt を求めよ。

(4)　$z = \mathrm{Arcsin}(x/y)$,　$x = 2st$, $y = s^2+t^2$ のとき、z_s, z_t を求めよ。

(5)　$z = xy$,　$x = \mathrm{Arcsin}(st)$, $y = \mathrm{Arccos}(st)$ のとき、z_s, z_t を求めよ。

4.　(1)　$\mathbf{R}^2$ で恒等的に $f_x(x,y) \equiv 0$ であれば、C^1-関数 $f(x,y)$ は y のみの関数となることを、平均値の定理を用いて示せ。

(2)　$\mathbf{R}^2$ 上の C^1-関数 $f(x,y)$ が、$ab \neq 0$ なる定数 a, b に対して $bf_x = af_y$ を満たすとする。$ax+by = u$ として $\varphi(x,u) = f(x,(u-ax)/b)$ とおくとき $\varphi_x = 0$ となることを示せ。これより (1) により $f(x,y)$ が $ax+by$ の関数である、即ち、ある関数 $h(x)$ があって $f(x,y) = h(ax+by)$ とできることがわかる。

(3)　$\mathbf{R}^2$ 上の C^1-関数 $f(x,y)$ が $xf_x - yf_y = 0$ を満たすとき、$f(x,y)$ が xy の関数であることを示せ。

5.　次の関数に $(0,0)$ の近傍で $n = 2$ に対して Taylor の定理を適用せよ。

(1)　e^{x+y}　　(2)　$(1-x-y)^{-1}$　　(3)　$e^x \cos y$

§ 4.5 **陰関数**の補足問題 [3]

6.　次の式により定まる陰関数 y の $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1)　$\log\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$　　(2)　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　$(a > 0, b > 0)$

7.　次の関係式より z_x, z_y を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$　$(a > 0, b > 0, c > 0)$　　(2)　$x^3+y^3+z^3-3xy = 1$

8.　$x^2+2xyz+z^2 = 4$ の点 $(1,1,1)$ における接平面と法線の方程式を求めよ。

9.　次の関係式によって定まる u, v の x, y に関する偏導関数を求めよ。

$x^2+y^2+u^2+v^2 = a^2$, $x+y+u+v = b$

10.　$f(x,y)$ は C^1-関数とする。

(1)　曲面 $f(ax-bz, ay-cz) = 0$ の接平面は一定直線に平行であることを示せ。

(2)　曲面 $f\Big(\dfrac{y-b}{x-a}, \dfrac{z-c}{x-a}\Big) = 0$ の接平面は定点を通ることを示せ。

---

[1] 多くは『戸田暢茂 著 微分積分学要論 学術図書』，『水本久夫 著 微分積分学問題集 培風館』から出題している。解答が間違っていたら連絡ください。

[2] **略解: 3.** (1) $-\frac{3}{2}\frac{\sin 4t}{\cos^6 t+\sin^6 t}$ (2) $(1/t-\log t)/\sqrt{e^{2t}-(\log t)^2}$ (3) $\frac{2h^2t}{1+(a^2+h^2t^2)^2}$ (4) $z_s = \frac{s^2-t^2}{|s^2-t^2|}\frac{-2t}{s^2+t^2}$, $z_t = \frac{s^2-t^2}{|s^2-t^2|}\frac{2s}{s^2+t^2}$
(5) $z_s = t(\mathrm{Arcsin}(st)-\mathrm{Arccos}(st))/\sqrt{1-(st)^2}$, $z_t = -s(\mathrm{Arcsin}(st)-\mathrm{Arccos}(st))/\sqrt{1-(st)^2}$
4. 略 **5.** $0 < \theta < 1$ とする (1) $1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2e^{\theta(x+y)}$, (2) $1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2(1-\theta(x+y))^{-3}$,
(3) $1+x+\frac{1}{2}(x^2\cos\theta y-2xy\sin\theta y-y^2\cos\theta y)e^{\theta x}$

[3] **略解: 6.** (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$ (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2}\frac{1}{y^3}$
7. (1) $z_x = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $z_y = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$ (2) $z_x = \frac{y-x^2}{z^2}$, $z_y = \frac{x-y^2}{z^2}$　　**8.** 接平面 $2x+y+2z = 5$, 法線 $x-1 = 2(y-1) = z-1$
9. $u_x = \frac{v-x}{u-v}$, $v_x = \frac{x-u}{u-v}$, $u_y = \frac{v-y}{u-v}$, $v_y = \frac{y-u}{u-v}$　　**10.** (1) 直線 $\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{a}$ に平行　(2) 点 (a,b,c) を通る