

- 以下を解くにあたり、定数 $\alpha > 0$ に対する広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ や $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ の収束・発散の結果は証明なしで用いても構わない。

1. 次の広義積分および定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ (2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+3)}$ (3) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-\cos^2 x}$

ヒント: (3) 広義積分になることに注意して、 $t = \tan x$ と置換せよ。

2. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ (2) $\int_1^\infty \frac{(\log x)^{100}}{x^2} dx$ (3) $\int_e^\infty \frac{dx}{x \log x}$

3. 広義積分 $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx$ は収束するが、絶対収束しないことを示せ。ただし、 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$ となることは証明なしに用いて構わない。

4. 曲線 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, a > 0$) 上の点 P における接線と x -軸, y -軸との交点をそれぞれ A, B とする。ただし、接線を考えることができない2点 $(a, 0), (0, a)$ を除いて考えるものとする。このとき、線分 AB の長さは点 P のとりかたによらず一定であることを示せ。

5. 曲線 $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$) が囲む図形の面積、および、この曲線の全長を求めよ。

以上

- 8月7日(火)14:40–14:50 複合棟 412 室にて答案用紙を返却します。
返却を希望するものは取に来てください。