

1. 次の不等式を示せ:

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ のとき、 } a > 0, b > 0 \text{ ならば、 } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

ヒント: $b^{-q} = (b^{1-q})^p$ に注意せよ。

2. $\text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \text{Arctan } x = 0 \quad (x < 0)$ を示せ。

3. 関数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ の増減、極値、上下への凸、変曲点を調べ、グラフの概形を描け。

4. $f(x) = \sin^3 x$ を $[0, x]$ で Taylor の公式を適用するとき、 x^5 の係数を求めよ。ただし、Taylor の公式は $n > 5$ なる n まで適用したとせよ。

5. 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Arcsin } x}{x^3} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\log \cos \frac{\pi}{2}x}{\log(1-x^2)}$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right\} \qquad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^a) \quad (a > 0)$$

6. Cauchy の平均値の定理を用いて次を示せ。

$$0 < a < b < 1, p > q > 0 \text{ ならば、 } \frac{b^p - a^p}{b^q - a^q} < \frac{p}{q}.$$