微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日 2007 年 6 月 22 日

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ と定める。$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能だが、$f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを示せ。ただし、$x \to +0$ のとき $\sin \dfrac{1}{x}$ および $\cos \dfrac{1}{x}$ が発散することは証明なしに用いてもかまわない。

2. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\mathrm{Arccos}(\sin x)$　　(2) $x^{\mathrm{Arctan}\, x}$

3. 次のライプニッツの公式を証明せよ:

自然数 n に対して、$f(x), g(x)$ が n 回微分可能であれば、

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

ここで、$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とし、$f^{(0)} = f, g^{(0)} = g$ と解釈する。

注意　この問題が解けなくても、ライプニッツの公式を **4**, **5** で用いて構わない。

4. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。ただし、$n \geq 3$ とする。

(1) $(1 + x^2)e^{2x}$　　(2) $\dfrac{3x}{2x^2 - x - 1}$　　(3) $\cos^3 x$

5. $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x$ について、次が成り立つことを示せ。

(1) $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 0.$

(2) $(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots .$

(3) $f^{(2m+1)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (2m - 1)^2,\ m = 1, 2, \ldots .$