微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日　2007 年 5 月 25 日

1.　第 n 項が $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ で与えられる数列の極限を求めよ。　ヒント: $\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ を計算せよ。

2.　$a_n=1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$ とおくとき、数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ 発散することを示せ。

ヒント: 例えば、$a_{2n}-a_n>\dfrac{1}{4}$ をまず示し、<u>数列 $\{a_n\}$ が上に有界ではない</u> ことを示せ。単調増加することは明らかだから、これで証明が完了する。

3.　次の極限を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ は既知とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^2-3x-2}{|x^2-x-2|}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{x-1}\right)$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)$

4.　$f(x)\to A\ (x\to a)$ のとき、$|f(x)|\to|A|\ (x\to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ。

5.　$x\to+0$ のとき $\sin\dfrac{1}{x}$ が収束をしないことを、ε-δ 論法もしくは関数に関する Cauchy の収束の条件を用いて示せ。