微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日 2007 年 5 月 8 日

1. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束し、別の数列 $\{b_n\}$ が

$$|b_n - \alpha| \leq |a_n - \alpha|$$

を満たせば、$\{b_n\}$ も α に収束することを ε-N 論法を用いて示せ。

2. b を正数とする。次の公理 I (アルキメデスの公理) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} bn = \infty$ を導け。
公理 I: 正数 a, b に対し $a < bN$ をみたす自然数 N が存在する。

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}} = 0$ を証明せよ。ただし、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$ は既知としてよい。

4. $0 < a < b$ とし、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $a_1 = a,\ b_1 = b,$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

で定義する。以下を示せ。

(1) $a_n < b_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ を示せ。

(2) $\{a_n\}$ が単調増加であることおよび $\{b_n\}$ が単調減少であることを示せ。

(3) $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(b_n - a_n),\ n = 1, 2, \ldots,$ を示し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ を示せ。

5. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

6. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2 + a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。
$\{a_n\}$ が Cauchy の判定条件をみたすことを示し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。