

1 [24] (脚注も参照せよ。²) (1) $\frac{1}{\sqrt{2x(1-x)}}$ は $(0, 1]$ で連続で、

$$(\text{与式}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \lim_{u \rightarrow +0} [\text{Arcsin}(x-1)]_u^1 = \lim_{u \rightarrow +0} (-\text{Arcsin}(u-1)) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $\frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+3})$ より、(与式) $= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{3}(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+3}) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} [\frac{1}{3}(\log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+3))]_1^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \{ \frac{1}{2} \log \frac{M^2}{M^2+3} + \frac{1}{2} \log 4 \} = \frac{1}{3} \log 2.$

(3) この積分は広義積分ではないが、(与式) $= \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \int_0^u \frac{dx}{4-\cos^2 x}$ と考える。ここで、 $t = \tan x$ とすると、 $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\frac{x|_{0 \rightarrow u}}{t|_{0 \rightarrow v}}$, ただし、 $v = \tan u$ で、 $u \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ のとき $v \rightarrow \infty$. よって、
 (与式) $= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v \frac{1}{4-\frac{1}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v \frac{dt}{3+4t^2} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_0^v \frac{dt}{\frac{3}{4}+t^2} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{4} [\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{3}}]_0^v = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Arctan} \frac{2v}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$

2 [24] (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ に対して、 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ より $\frac{\sin x}{x^2} \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{x}$. ここで、 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$ であるから、与式は ∞ に発散する。

(2) $x^{3/2} \frac{(\log x)^{100}}{x^2} = (\frac{\log x}{x^{2/3}})^{100}$ で $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{2/3}} = 0$ を考えると、これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形で、
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)'}{(x^{2/3})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{3}x^{1/3}} = 0$ より、l'Hôpital の定理と最初の式より $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \frac{(\log x)^{100}}{x^2} = 0$. よって、ある $K > 0, M > 0$ があって、 $\frac{(\log x)^{100}}{x^2} \leq \frac{K}{x^{3/2}}$ ($x \geq M$) とでき、 $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ は収束するので、与式も収束する。

(3) $t = \log x$ とおくと、 $dt = \frac{1}{x} dx$ で (与式) $= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_e^M \frac{dx}{x \log x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^{\log M} \frac{dt}{t} = \lim_{M \rightarrow \infty} [\log t]_1^{\log M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \log \log M = \infty$. 即ち、発散する。

3 [8+8] $\frac{\sin x}{x^{1/2}}$ は $[1, \infty)$ で連続であるから、(与式) $= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx$ となることをに注意する。

$v > u > 1$ に対し、 $\int_u^v \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx = \int_u^v \frac{(-\cos x)'}{x^{1/2}} dx = -\frac{\cos v}{v^{1/2}} + \frac{\cos u}{u^{1/2}} - \int_u^v \frac{\cos x}{2x^{3/2}} dx$. ここで、 $|\frac{\cos u}{u^{1/2}}| \leq \frac{1}{u^{1/2}}$ より $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\cos u}{u^{1/2}} = 0$. 同様に、 $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\cos v}{v^{1/2}} = 0$. また、 $|\frac{\cos x}{2x^{3/2}}| \leq \frac{1}{2x^{3/2}}$ で $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ は収束するから $\int_1^\infty \frac{\cos x}{2x^{3/2}} dx$ は収束するので、 $\int_u^v \frac{\cos x}{2x^{3/2}} dx \rightarrow 0$ ($u, v \rightarrow \infty$) を得る。以上より、 $\int_u^v \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx \rightarrow 0$ ($u, v \rightarrow \infty$) となるので、 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx$ は収束する。

$\int_1^\infty |\frac{\sin x}{x^{1/2}}| dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^{m\pi} |\frac{\sin x}{x^{1/2}}| dx$ で、 $\int_1^{m\pi} |\frac{\sin x}{x^{1/2}}| dx \geq \sum_{n=2}^m \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\frac{\sin x}{x^{1/2}}| dx \geq \sum_{n=2}^m \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} |\frac{\sin x}{(\pi n)^{1/2}}| dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^m \frac{2}{n^{1/2}}$. ここで、 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$ であるから、 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=2}^m \frac{2}{n^{1/2}} \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$) となる。よって、広義積分 $\int_1^\infty |\frac{\sin x}{x^{1/2}}| dx$ は ∞ に発散するから、 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx$ は絶対収束しない。

4 [6] P $(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ とすると、 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$ となるので、接線の方程式は $y = -\frac{\sin t}{\cos t}(x - a \cos^3 t) + a \sin^3 t$. これより、 x -軸との交点 A は $(a \cos t, 0)$, y -軸との交点 B は $(0, a \sin t)$ となる。よって、 $AB^2 = (a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 = a^2$ と一定となる。

5 [6+4] 第 1 象限について求め 4 倍すればよい。求める面積を S , 全長を L とかく。

曲線はパラメータ表示すると $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ となるので、

$\frac{S}{4} = \int_0^a y dx = \int_{\pi/2}^0 a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt$. ここで、 $n \geq 2$ に対して、 $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t (-\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n-2} t}{n-1} \cos^2 t dt = \frac{1}{n-1}(I_{n-2} - I_n)$ より $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ となる。よって、 $S = 12a^2(I_4 - I_6) = 12a^2(1 - \frac{5}{6})I_4 = 2a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{3\pi}{8}a^2$.

$\frac{L}{4} = \int_0^a \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{\pi/2} |3a \sin t \cos t| dt = \frac{3}{2}a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{3}{2}a$. よって、 $L = 6a$.

● 解答用紙左上に記入してある ABCDF は順に数学序論演習 I, 微分積分学 AD I の成績です。基準は 7 回の試験の点の合計点が 140 点以下は FF, 141 ~ 155 点は CC (4 名), 156 ~ 170 点は BC (10 名), 171 ~ 185 点は BB (7 名), 186 ~ 200 点は BA (7 名), 201 点以上は AA (5 名) としました。

夏休みの勉強はとても大切です。今期勉強したことは後期のこの授業で引き続き勉強する事柄であり、それ以上に今後 4 年間勉強する解析系幾何系科目や確率統計などの基礎となる事柄です。今回の成績にかかわらず、夏休み復習 (特に ϵ - δ 論法と計算力の強化、できれば論理性の修得) に励んでください。後期も (こそ) 合格してくれると期待しています。

¹注意 この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[] 内はその問題の配点で、満点は 80 点である。

²広義積分を通常の積分に帰着せずに解いた解答は 0 点とした。(そのための定理等に言及してある場合を除く。) また、授業中注意したとおり、必要な収束発散の議論なしに広義積分のまま置換積分や部分積分を行った解答も 0 点とした。問題 2, 3 についても同様。