微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 7 月 20 日のテストの解答の要点[1]

1 [5+7×5] 以下、C は積分定数を表す。(1) $I=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\,dx=\tan x-x+C$.

(2) $\int \mathrm{Arccos}\,x\,dx=\int x'\,\mathrm{Arccos}\,x\,dx=x\,\mathrm{Arccos}\,x+\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ で, $t=1-x^2$ とおくと $\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\sqrt{t}+C$. よって、$I=x\,\mathrm{Arccos}\,x-\sqrt{1-x^2}+C$.

(3) $\frac{x^3-2}{(x+1)(x-2)}=x+1+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}$ より $I=\frac{1}{2}x^2+x+\log|x+1|+2\log|x-2|+C$.

(4) $t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ とすると、$x=\frac{1}{1+t^2}$ より、$I=\int t(\frac{1}{1+t^2})'\,dx=\frac{t}{1+t^2}-\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{t}{1+t^2}-\mathrm{Arctan}\,t+C=\sqrt{x(1-x)}-\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C$.

(5) $t=\tan x$ とすると、$dx=\frac{1}{1+t^2}\,dt$ より $I=\int\frac{1}{1+t}\frac{1}{1+t^2}\,dt\overset{*}{=}\frac{1}{2}\int(\frac{1}{1+t}-\frac{2t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{1+t^2})\,dt=\frac{1}{2}\log|1+t|-\frac{1}{4}\log(1+t^2)+\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,t+C=\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+\frac{1}{2}x+C$.
($*$ では、$\frac{1}{1+t}\frac{1}{1+t^2}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+D}{1+t^2}$ とおくと、$1=A(1+t^2)+(Bt+D)(1+t)$ となるから、$A+B=0, B+D=0, A+D=1$ となり、$A=D=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$ を得た。)

(6) $t=\sqrt{e^{2x}-2}$ とすると、$x=\frac{1}{2}\log(t^2+2)$ より、$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{t^2+2}$. よって、$I=\int t\frac{t}{t^2+2}\,dt=\int(1-\frac{2}{t^2+2})\,dt=t-\frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,\frac{t}{\sqrt{2}}=\sqrt{e^{2x}-2}-\sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{e^{2x}-2}{2}}+C$.

2 [6+7+7] (1) $(x-1)(5-x)=4-(x-3)^2$ より、$x=2\cos\theta+3$ とすると、$dx=-2\cos\theta\,d\theta$ で $\left.\frac{x}{\theta}\right|\frac{1\ \to\ 4}{\pi\ \to\pi/3}$ より、(与式)$=\int_{\pi}^{\pi/3}|2\sin\theta|(-2\sin\theta)\,d\theta=\int_{\pi/3}^{\pi}4\sin^2\theta\,d\theta=\int_{\pi/3}^{\pi}2(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
注: 中心 $(3,0)$, 半径 2 の円の $1\le x\le 5, y\ge 0$ の部分であることを用いてもよい。

(2) $t=\tan\frac{x}{2}$ とすると、$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ で $\left.\frac{x}{t}\right|\frac{0\to\frac{\pi}{2}}{0\to 1}$ より、(与式)$=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{2\,dt}{3+t^2}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(3) (与式)$=I$ とかく。$t=\pi-x$ とおくと、$I=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-1)\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt-I$. よって、$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$ となる。ここで、$t=\cos x$ とすると、$dt=-\sin x\,dx$ で $\left.\frac{x}{t}\right|\frac{0\to\pi}{1\to -1}$ より、
$I=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}[\mathrm{Arctan}\,t]_{-1}^{1}=\pi\,\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi^2}{4}$.

3 [8] (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+4(\frac{k}{n})^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$. $t=2x+\sqrt{1+4x^2}$ とすると、$x=\frac{t^2-1}{4t}$, $dx=(\frac{1}{4}+\frac{1}{4t^2})\,dt$ で $\left.\frac{x}{t}\right|\frac{0\to\ 1}{1\to 2+\sqrt{5}}$ より、(与式)$=\int_1^{2+\sqrt{5}}\frac{1}{t-\frac{t^2-1}{2t}}\frac{t^2+1}{4t^2}\,dt=\int_1^{2+\sqrt{5}}\frac{1}{2t}\,dt=\left[\frac{1}{2}\log|t|\right]_1^{2+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})$.

4 [5] $f(x)=x+e^x\int_0^2 e^{-t}f(t)\,dt$ より、$C=\int_0^2 e^{-t}f(t)\,dt$ とおくと、$f(x)=x+Ce^x$ より、$C=\int_0^2 e^{-t}(t+Ce^t)\,dt=1-3e^{-2}+2C$. よって、$C=3e^{-2}-1$ となるから、$f(x)=x+(3e^{-2}-1)e^x$.

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **73 点**である。