微分積分学 AD I, 数学序論演習 I　　2007 年 7 月 6 日のテストの解答の要点[1]

1 [8] ヒントより両辺を b^q で割ることで、$ab^{1-q} \le \frac{ab^{1-q}}{p} + \frac{1}{q}$ を示せばよい。$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$ とおくと、$f'(x) = x^{p-1} - 1$ より、左の増減表を得る。よって、$f(x) \ge 0$ で、$x = ab^{1-q}$ を代入することで与式を得る。等号成立は $a = b^{q-1}$ のときである。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

2 [8] $f(x) = \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \mathrm{Arctan}\,x$ $(x<0)$ とおくと、$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\frac{-2x}{2(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{1+x^2}$ $= \frac{x}{|x|(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2} = 0$ ($x<0$ より)。よって、$f(x)$ は定数関数である。また、$f(-1) = \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{Arctan}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ であるから、以上より、$f(x) = 0$ $(x<0)$. よって、与式を得る。

3 [10] 教科書 p.64 問題 2.2 2.(2) と全く同じなので略す。

4 [7] $f(x) = \sin^3 x$ とおく。$(\sin ax)^{(5)} = a^5 \cos ax, \sin^3 x = \sin x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$ より、$f^{(5)}(x) = -\frac{1}{4}3^5 \cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$. よって、$\frac{1}{5!}f^{(5)}(0) = -\frac{1}{2}$.

5 [32] 注意[2] (1) (与式) は $\frac{0}{0}$ で不定形。$\frac{(x-\mathrm{Arcsin}\,x)'}{(x^3)'} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{3\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)} \to -\frac{1}{6}$ $(x \to 0)$ より l'Hôpital の定理より (与式)$= -\frac{1}{6}$.

(2) $x = 1-t$ とおくと、$x \to 1-0$ のとき $t \to +0$ で[3]、(与式)$= \lim_{t\to+0} \frac{\log\sin\frac{\pi}{2}t}{\log t(2-t)}$ で、これは $\frac{-\infty}{-\infty}$ の不定形。$\frac{(\log\sin\frac{\pi}{2}t)'}{(\log t(2-t))'} = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t/\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{1}{t}-\frac{1}{t-2}} = \frac{(t-2)\cos\frac{\pi}{2}t}{-2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t} \to \frac{-2}{-2}\cdot 1 = 1$ $(t \to +0)$ となるから、l'Hôpital の定理より (与式)$= 1$.

(3) $x = \frac{1}{t}$ とおくと、$x \to \infty$ のとき $t \to +0$ より、(与式)$= \lim_{t\to+0}\{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\log(1+t)\} = \lim_{t\to+0}\frac{t-\log(1+t)}{t^2}$ で、これは $\frac{0}{0}$ の不定形。$\frac{(t-\log(1+t))'}{(t^2)'} = \frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2(1+t)} \to \frac{1}{2}$ $(t \to +0)$. よって、l'Hôpital の定理より (与式)$= \frac{1}{2}$.

(4) (与式)$= \lim_{x\to\infty} e^x(1-\frac{x^a}{e^x}) = \lim_{x\to\infty} e^x(1-(\frac{x}{e^{x/a}})^a)$ なので、$\alpha := \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x/a}}$ を考える。これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形で、$\frac{(x)'}{(e^{x/a})'} = \frac{1}{\frac{1}{a}e^{x/a}} \to 0$ $(x \to \infty)$ となるので、l'Hôpital の定理より $\alpha = 0$. よって、(与式)$= \infty$ を得る。

6 [5] $f(x) = x^p, g(x) = x^q$ とおくと、Cauchy の平均値の定理により、$\frac{b^p-a^p}{b^q-a^q} = \frac{pc^{p-1}}{qc^{q-1}}$, $a<c<b$ となる c が存在する。ここで、$0<c<1$, $p>q>0$ に注意すると、$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{p}{q}c^{p-q} < \frac{p}{q}$. 以上より、与式は成立する。

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **70 点**である。

[2] 不定形であることを断らずに l'Hôpital の定理を用いた場合、一回につき 3 点減点した。

[3] $t \to 0$ ではないことに注意せよ。$t<0$ のとき、分母分子ともに定義されない。