微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 6 月 22 日のテストの解答の要点[1]

1 [10]　$|\frac{f(h)-f(0)}{h}| = |h\sin\frac{1}{h}| \le |h| \to 0\ (h \to +0)$ であるから $f'_+(0) = 0$, $\frac{f(h)-f(0)}{h} = 0 \to 0\ (h \to -0)$ であるから $f'_-(0) = 0$ より、$f'(0) = 0$ となり $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能。

一方、$x > 0$ のとき $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ となるが、$x \to +0$ とすると、$|2x\cos\frac{1}{x}| \le 2|x| \to 0$ より $2x\cos\frac{1}{x}$ は 0 に収束するが、$\sin\frac{1}{x}$ は発散するので $f(x)$ も発散する。よって、$\lim_{x\to+0} f'(x)$ は存在しないので、特に $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではない。

2 [10]　(1)　(与式)$' = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2)　$f(x) = x^{\mathrm{Arctan}\, x}$ とすると、$\log f(x) = \mathrm{Arctan}\, x \cdot \log x$. よって、$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\mathrm{Arctan}\, x}{x}$ であるから $f'(x) = \{\frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\mathrm{Arctan}\, x}{x}\}x^{\mathrm{Arctan}\, x}$.

3 [10]　$n = 1$ のとき、(右辺)$= \binom{1}{0}f^{(1)}g^{(0)} + \binom{1}{1}f^{(0)}g^{(1)} = f'g + fg' = (fg)'$ より成立する。

$n-1$ のとき成り立つと仮定すると、n のとき、

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(n-1-k)}g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(f^{(n-k)}g^{(k)} + f^{(n-1-k)}g^{(k+1)})\\
&= f^{(n)}g + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}f^{(n-1-k)}g^{(k+1)} + fg^{(n)}\\
&= f^{(n)}g + \sum_{k=1}^{n-1}\{\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\}f^{(n-k)}g^{(k)} + fg^{(n)}\\
&= f^{(n)}g + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}
\end{aligned}
$$

ここで、3 行目の等号は $l = k+1$ とおくと $\sum_{k=0}^{n-2}a_k = \sum_{l=1}^{n-1}a_{l-1}$ となることを、4 行目の最初の等号では $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(n-k+k) = \binom{n}{k}$ を用いた。(この 2 つの事柄が述べてない解答は 0 点とした。) よって、n のときも成立するので、数学的帰納法によってすべての自然数 n に対して与式は成立する。

4 [15]　(1)　ライプニッツの公式により、

$$
\begin{aligned}
\{(1+x^2)e^{2x}\}^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)} = (1+x^2)2^ne^{2x} + \binom{n}{1}2x2^{n-1}e^{2x} + \binom{n}{2}2\cdot 2^{n-2}e^{2x}\\
&= 2^ne^{2x}(1 + x^2 + nx + \tfrac{n(n-1)}{4}).
\end{aligned}
$$

(2)　$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (\frac{-a}{(ax+b)^2})^{(n-1)} = (\frac{(-a)^2\cdot 2}{(ax+b})^{(n-2)} = \cdots = \frac{(-a)^n\cdot(n-1)!}{ax+b}$ に注意すると、

$\frac{3x}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x-1}$ より、$(\frac{3x}{2x^2-x-1})^{(n)} = (\frac{1}{2x+1})^{(n)} + (\frac{1}{x-1})^{(n)} = \frac{(-2)^n\cdot(n-1)!}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n\cdot(n-1)!}{(x-1)'}$.

(3)　$(\cos ax)^{(n)} = (-a\sin ax)^{(n-1)} = (a\cos(ax + \frac{\pi}{2}))^{(n-1)} = \cdots = a^n\cos(ax + \frac{n}{2}\pi)$ に注意すると、

$\cos^3 x = \cos x\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$ より、

$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{1}{4}(\cos 3x)^{(n)} + \frac{3}{4}(\cos x)^{(n)} = \frac{3^n}{4}\cos(3x + \frac{n}{2}\pi) + \frac{3}{4}\cos(x + \frac{n}{2}\pi)$.

5 [15]　(1)　$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ であるから、$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$ を満たす。

(2)　(1) の両辺を n 回微分すると、ライプニッツの公式により、

$$
\begin{aligned}
\{(1-x^2)f''(x)\}^{(n)} &= (1-x^2)f^{(n+2)} + \binom{n}{1}(1-x^2)'f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{2}(1-x^2)''f^{(n)}(x)\\
&= (1-x^2)f^{(n+2)} - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x),
\end{aligned}
$$

$\{xf'(x)\}^{(n)} = xf^{(n+1)} + \binom{n}{1}(x)'f^{(n+1)}(x) = xf^{(n+1)} + nf^{(n+1)}(x)$

となるから、与式が成立する。

(3)　(2) で $n = 2m-1$, $x = 0$ とすると、$f^{(2m+1)}(0) - (2m-1)^2f^{(2m-1)}(0) = 0$. よって、$f'(0) = 1$ であるから、この漸化式から、$f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2f^{(2m-1)}(0) = (2m-1)^2\cdot(2m-3)^2f^{(2m-3)}(0) = \cdots = (2m-1)^2\cdot(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2\cdot f^{(1)}(0) = 1^2\cdot 3^2\cdots(2m-1)^2$ となる。

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **60 点**である。