微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 6 月 8 日のテストの解答の要点[1]

1 [10] (1) (与式)$=\alpha$ とおくと $\cos\alpha=-\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=-\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{12}$, $0\le\alpha\le\pi$ となるから、$\alpha=\frac{11}{12}\pi$.

(2) (与式)$=\alpha$ とおくと $\tan\beta=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{7}{12}\pi$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ となるから、$\beta=-\frac{5}{12}\pi$.

2 [10] (1) $\varphi(x)=x-f(x)$ とおくと、$\varphi(x)$ は $[0,2]$ で連続であり、$\varphi(0)=-f(0)<0$, $\varphi(2)=2-f(2)>0$. よって、$\varphi(0)<0<\varphi(2)$ 少なくとも一つ解をもつ。

(2) 三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\ne 0)$ について $P(x)=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$ とおくと、$P(x)=x^3(1+\frac{b}{a}\frac{1}{x}+\frac{c}{a}\frac{1}{x^2}+\frac{d}{a}\frac{1}{x^3})$ より、$\lim_{x\to\infty}P(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$. よって、ある $M_1>0, M_2>0$ があって、$x>M_1$ ならば $P(x)>1$, $x<-M_2$ ならば $P(x)<-1$ とできる。このとき、$P(x)$ は明らかに連続で $P(-M_2)<0<P(M_1)$ あるから、$[-M_2,M_1]$ において中間値の定理を用いると、$P(\alpha)=0$, $-M_2\le\alpha\le M_1$ を満たす α が存在する。この α は $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$ を満たすので、三次方程式は実根をもつ。

3 [25] (1) $t=\cos x-1$ とおくと、$x\to 0$ のとき $t\to 0$ より、(与式)$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-1/t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{1/t}}=\frac{1}{e}$.

(2) $t=2^x-1$ とおくと $x\log 2=\log(1+t)$ で、$x\to 0$ ならば $t\to 0$.
よって、(与式)$=\lim_{t\to 0}\frac{t\log 2}{\log(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\log 2}{\log(1+t)^{1/t}}=\frac{\log 2}{\log e}=\log 2$.

(3) $t_n=\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}$ とおくと $\lim_{n\to\infty}t_n=0$ であるから、$\lim_{n\to\infty}(1+t_n)^{1/t_n}=e$ となる[2]。従って、(与式)$=\lim_{n\to\infty}\{(1+t_n)^{1/t_n}\}^{(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})n}=\lim_{n\to\infty}\{(1+t_n)^{1/t_n}\}^{2+\frac{2}{n}}=e^2$.

(4) $t=\mathrm{Arcsin}\,x$ とおくと、$x\to 0$ と $t\to 0$ は同値であるから、(与式)$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

(5) $t=\mathrm{Arccos}\,x$ とおくと、$x\to 1-0$ と $t\to +0$ は同値で、
(与式)$=\lim_{t\to+0}\frac{t^2}{\cos t-1}=\lim_{t\to+0}(\frac{\sin t}{t})^{-2}(-\cos t-1)=-2$.

4 [5+10] (1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\delta=\varepsilon$ とおくと $\delta>0$ で $|x|<\delta$ ならば $|f(x)-f(0)|=|f(x)|\le|x|<\varepsilon$ となるので、$f(x)$ は $x=0$ で連続。

(2) 任意の実数 a とする。このとき、各 $n\in\mathbf{N}$ に対して、有理数 t_n を有理数の稠密性により $a<t_n<a+\frac{1}{n}$ と、無理数 x_n を無理数の稠密性により $a<x_n<a+\frac{1}{n}$ ととれる。これより、a に収束する有理数からなる数列 $\{t_n\}$ と無理数からなる数列 $\{x_n\}$ が得られる。よって、$\lim_{n\to\infty}f(t_n)=\lim_{n\to\infty}t_n=a$, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$ となるので、$a\ne 0$ のとき、$\lim_{x\to a}f(x)$ は存在しない。即ち、$f(x)$ は $x=a$ で連続ではない。

5 [10] (1) $|\cos(x+h)-\cos x|=|-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}|\le 2|\sin\frac{h}{2}|\le 2|\frac{h}{2}|=|h|$ となるから、任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\delta=\varepsilon$ とすれば、$\delta>0$ で、$|x-t|<\delta$ となるすべての実数 x,t に対して $|\cos x-\cos t|\le|x-t|<\varepsilon$ となるので一様連続である。

(2) 一様連続と仮定すると、$\varepsilon=1$ に対してある $\delta>0$ があって、

$$|x-t|<\delta \text{ ならば } |\sin\tfrac{\pi}{x}-\sin\tfrac{\pi}{t}|<1 \quad\cdots\ (\mathrm{I})$$

とできる。ここで、$x_n=\frac{1}{2n}$, $t_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ とすると、$|x_n-t_n|=\frac{1/2}{2n(2n+1/2)}<\frac{1}{8n}$ より、$n>\frac{1}{8\delta}$ なる自然数 n に対して、$0<|x_n-t_n|<\delta$ となるが $|\sin\frac{\pi}{x_n}-\sin\frac{\pi}{t_n}|=|0-1|=1$. これは (I) に矛盾する。よって、一様連続ではない。

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **70 点**である。
[2] $\lim_{x\to\alpha}f(x)=A$ で $\{x_n\}$ が $x_n\ne\alpha$ $(n\in\mathbf{N})$ かつ $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を満たせば、$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$ となることを用いた (定理 1.14)。