微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 5 月 25 日のテストの解答の要点[1]

1 [5] $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$ より、
(与式)$= \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \to \frac{1}{4}$ $(n \to \infty)$.

2 [5] $a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2\cdot 2n-1} = \frac{n}{4n-1} > \frac{1}{4}$. よって、$a_{2^m} = a_{2^m} - a_{2^{m-1}} + a_{2^{m-1}} - a_{2^{m-2}} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 > \frac{m}{4} + 1$. $\{a_n\}$ は単調増加だから、任意の $M > 0$ に対して、$N = 2^{[4M]}$ とおけば、$n \geq N$ ならば $a_n \geq a_{2^{[4M]}} > \frac{[4M]}{4} + 1 > M$ となり、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を得る。

3 [25] (1) (与式)$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x \tan x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$.

(2) $t = \pi(x-1)$ とおくと、$x \to 1$ と $t \to 0$ は同値であるから、
(与式)$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\pi)}{t/\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{-\pi \sin t}{t} = -\pi$.

(3) $0 < x < 2$ のとき $|x^2 - x - 2| = |(x+1)(x-2)| = -(x+1)(x-2)$ だから、
(与式)$= \lim_{x\to 2-0} \frac{(2x+1)(x-2)}{-(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2-0} \frac{2x+1}{-(x+1)} = -\frac{5}{3}$.

(4) $|\cos\sqrt{x} - \cos\sqrt{x-1}| = |-2\sin\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{2} \sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{2}| \leq 2|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}| \to 0$ $(x \to \infty)$. よって、(与式)$= 0$.

(5) $t = -x$ とおくと、$x \to -\infty$ と $t \to +\infty$ は同値であるから、
(与式)$= \lim_{t\to\infty} (-t)(-t + \sqrt{2+t^2}) = \lim_{t\to\infty} \frac{-t(-t^2+2+t^2)}{t+\sqrt{2+t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}} = -1$.

注意 解答に $\lim_{t\to\infty} -t(-t+\sqrt{2+t^2})$ という式を書いているものが多くあった。これは $\lim_{t\to\infty}$ から $t(-t+\sqrt{2+t^2})$ を引いたものを表している。(もちろん意味を成さない。) 括弧を忘れずにつけること。今回は減点しなかったが次回から減点します。さすがに、$\lim_{t\to\infty} t^2 - t\sqrt{2+t^2}$ とした解答からは 2 点減点しました。

4 [5] 実数 a, b に対して $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ に注意する。$\varepsilon > 0$ を任意にとる。仮定よりある $\delta > 0$ があって、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ とできる。ここで、$\big||f(x)| - |A|\big| \leq |f(x) - A|$ であるから、上とあわせて、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $\big||f(x)| - |A|\big| < \varepsilon$ となる。以上より、$|f(x)| \to |A|$ $(x \to a)$ を得る。

5 [10] 収束すると仮定し、その極限を A とすると、$\varepsilon = \frac{1}{2}$ をとれば、ある $\delta > 0$ があって、$0 < x < \delta$ ならば $|\sin\frac{1}{x} - A| < \frac{1}{2}$ とできる。これより、

$$0 < x < \delta, 0 < t < \delta \ \Rightarrow \quad |\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{t}| \leq |\sin\frac{1}{x} - A| + |\sin\frac{1}{t} - A| < 1. \qquad \cdots \text{(I)}$$

ここで、$N \in \mathbf{N}$ を $2\pi N > \frac{1}{\delta}$ と選び (Archimedes の公理を用いた)、$x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $t_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ とすると、$n \geq N$ ならば $0 < x_n < \delta$, $0 < t_n < \delta$ となるが、$|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{t_n}| = |0 - 1| = 1$. これは (I) に矛盾する。よって、収束しない。

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **50 点**である。