微分積分学 AD I, 数学序論演習 I 2007 年 5 月 8 日のテストの解答の要点[1]

1 [5] $\varepsilon > 0$ を任意にとる。$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して、$n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$ とできる。よって、$|b_n - \alpha| \leq |a_n - \alpha|$ より、$n \geq N \Rightarrow |b_n - \alpha| < \varepsilon$ となり、主張を得る。

2 [5] 任意の $M > 0$ に対して、アルキメデスの公理によりある $N \in \mathbf{N}$ があって、$M < bN$ とできる。このとき、$n \geq N$ ならば $bn \geq bN$ より、$n \geq N \Rightarrow bn > M$ となり、主張を得る。

3 [5] $(2n)! \geq 2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \geq n^n$ であるから、$\sqrt[2n]{(2n)!} \geq (n^n)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{n}$.
よって、$0 \leq \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}} \leq \sqrt{\frac{1}{n}}$ で、$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$ であるから、与式を得る。

4 [15] (1) 数学的帰納法を用いる。$n = 1$ のときは明らか。n のとき成り立つと仮定すると、$a_n < b_n$ であるから、特に $a_n \neq b_n$. $n+1$ のとき、$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 > 0$. よって、成立するから、証明は完了した。

(2) 定義から明らかに $a_n > 0$ であることに注意する。(1) より $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) > 0$. よって、$\{a_n\}$ は単調増加となる。再び (1) より、$b_{n+1} - b_n = (a_n + b_n)/2 - b_n = -(b_n - a_n)/2 < 0$ となり、$\{b_n\}$ は単調減少となる。[2]

(3) $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ より $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$. よって、(1) とあわせて、$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$. ここで、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) = 0$ であるから、$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ となる。

5 [8+7] (1) まず、数学的帰納法を用い、$a_n > 0$ を証明する。$n = 1$ のときは $a_1 = 1$ より成立する。n までのとき、即ち、$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ が成立すると仮定する[3]。$n+1$ のとき、$a_1 + \cdots + a_n > 0$ であるから $a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} > 0$. よって、すべての n に対して $a_n > 0$ が示された。特に、$\{a_n\}$ が下から有界である。また、$0 < a_1 + \cdots + a_{n-1} < a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ より $a_n > a_{n+1}$ となるので、$\{a_n\}$ は単調減少である。

(2) (1) より $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とする。すべての n に対して $a_n > 0$ であるから、$\alpha \geq 0$. もし、$\alpha > 0$ であれば、$\{a_n\}$ は単調減少であるから、$a_n \geq \alpha$ $(n \in \mathbf{N})$ となり、特に与えられた漸化式により、$(0 <) a_{n+1} \leq \frac{1}{n\alpha}$. よって、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となり、これは $\alpha > 0$ に矛盾する。よって、$\alpha = 0$ となるので、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる[4]。

6 [10] 数学的帰納法により $a_n > 0$ が示せる。よって、$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{(2+a_n)(2+a_{n-1})}$ より、$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}|$ となる。従って、$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4^{n-1}}|a_2 - a_1| = \frac{1}{4^n}$. これより、$m > n$ ならば、
$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{4^n} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$. よって、$a_m - a_n \to 0$ $(m, n \to \infty)$ となるので、$\{a_n\}$ は Cauchy の判定条件を満たす。
よって、$\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とすると、与えられた漸化式により $\alpha = 2 + \frac{1}{2+\alpha}$. これを解いて $\alpha = \pm\sqrt{5}$. ここで、$a_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ より $\alpha \geq 0$ であるから、$\alpha = \sqrt{5}$ を得る。

---

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **55 点**である。

[2] この解答に数学的帰納法を使っていないのに「数学的帰納法により」という証明が多々あった。今回は減点しなかったが、次回テストからそう書いた答案は**減点**する。

[3] 「$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$」を一つの命題として数学的帰納法を用いた。(高校の学習指導要領ではこのような「技巧をもちいるものは避ける」と書いてある。しかし、実は有効な場合が多いのであえてこの証明法を述べた。) 別証明: $a_n > 0$ のみ仮定し、$a_{n+1} = 1/(\frac{1}{a_n} + a_n) > 0$ としてもよい。

[4] 別証明: (1) より $\{a_n\}$ は単調減少であるから、$n \geq 2$ のとき、$a_n = \frac{1}{a_1 + \cdots + a_{n-1}} < \frac{1}{a_n + \cdots + a_n} = \frac{1}{(n-1)a_n}$ となる。よって、$0 < a_n < \sqrt{\frac{1}{n-1}}$ となるので、$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n-1}} = 0$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるとしてもよい。