3.3.1 定数係数斉次方程式の別証明

この節では斉次方程式 (3.19) で特に係数 $a_1, \ldots, a_n$ が定数の場合を考える。このとき、方程式は $P(D)x = 0$ と表せる。ただし、$D = \frac{d}{dt}$,

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

とした。これが (3.11) のように $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ と変形できたとする[1]。ただし、λ_j $(j = 1, \ldots, r)$ は $P(\lambda)$ の根で m_j はその重複度で $m_1 + \cdots + m_r = n$ である。このとき、次が成立する。

定理 0.1　方程式 $P(D)x = 0$ の解は、次の n 個の関数

$$e^{t\lambda_1}, te^{t\lambda_1}, \cdots, t^{m_1-1}e^{t\lambda_1}\,;\, e^{t\lambda_2}, te^{t\lambda_2}, \cdots, t^{m_2-1}e^{t\lambda_2}\,;\, \cdots\,;\, e^{t\lambda_r}, te^{t\lambda_r}, \cdots, t^{m_r-1}e^{t\lambda_r} \tag{0.1}$$

の一次結合で表せる。

命題 0.2　方程式 $(D-\lambda)^m x = 0$ の解からなる空間 $V = \{x; (D-\lambda)^m x = 0\}$ の基底は $e^{t\lambda}, te^{t\lambda}, \cdots, t^{m-1}e^{t\lambda}$ からなる。

証明:　命題 3.17 の前にかいたことから、$\dim V = m$ であるから、$x_j = \frac{t^j}{(j-1)!}e^{t\lambda}$ $(j = 1, \ldots, m)$ が $(D - \lambda)^m x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ を満たし、それが一次独立であることを示せばよい。これは、

$$\begin{aligned}(D-\lambda)^j x_j &= (D-\lambda)^{j-1}\Big\{\frac{t^{j-2}}{(j-2)!}e^{t\lambda} + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\lambda e^{t\lambda} - \lambda\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{t\lambda}\Big\} = (D-\lambda)^{j-1}x_{j-2} \\ &= \cdots = (D-\lambda)x_1 = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = 0, \qquad j = 1, 2\ldots, m,\end{aligned}$$

となることおよび、$y_1 = 1, y_2 = \frac{t}{1!}, \cdots, y_m = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ の Wronskian を計算すると 1 となるから命題 3.17 から従う。　□

命題 0.3　λ の多項式 $P_1(\lambda), \ldots, P_r(\lambda)$ のどの *2* つも共通の根をもたないとする。このとき

$$V_j := \{\, x\,;\, P_j(D)x = 0\,\} \quad (j = 1, \ldots, r); \qquad V_0 := \{\, x\,;\, P_1(D)\cdots P_r(D)x = 0\,\}$$

の間には $V_0 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ という関係式が成立する。

証明:[2]　$r = 2$ で示す。(一般の場合はそれを繰り返し用いればよい。) どの 2 つも共通の根をもたないから、ある多項式 h_1, h_2 が存在して

$$P_1(\lambda)h_1(\lambda) + P_2(\lambda)h_2(\lambda) \equiv 1$$

とすることができる。λ として D を代入すると

$$P_1(D)h_1(D) + P_2(D)h_2(D) = 1. \tag{0.2}$$

よって、$\forall x$ に対し $x_1 = P_2(D)h_2(D)x$, $x_2 = P_1(D)h_1(D)x$ とすると、$x = x_1 + x_2$ となる。このとき、

$$P_1(D)x_1 = h_2(D)\{P_1(D)P_2(D)x\} = 0, \quad P_2(D)x_2 = h_1(D)\{P_1(D)P_2(D)x\} = 0$$

となり、$x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ を得る。

次に分解の一意性を示す。$x \in V_0$ に対し

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \qquad x_1, y_1 \in V_1, \quad x_2, y_2 \in V_2$$

とできたとする。このとき、$z := x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in V_1 \cap V_2$ であるから (0.2) により $z = h_1(D)P_1(D)z + h_2(D)P_2(D)z = 0.$　□

定理 0.1 の証明: $V = \{x; P(D)x = 0\}, V_k = \{x; (D-\lambda_k)^{m_k}x = 0\}$ とおくと、命題 0.3 から $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ となるが、命題 0.2 に注意すると (0.1) は各 V_k の基底を並べたものとなるから、主張は従う。　□

[1] 定数係数であるから、一般に多項式 $f(\lambda), g(\lambda)$ に対して $f(D)g(D) = g(D)f(D)$ となることに注意する。もし定数係数でなければこの等式は成立しない。例: $\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}x = \frac{dx}{dt} + t\frac{d^2x}{dt^2}, t\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}x = t\frac{d^2x}{dt^2}$ となるので $\frac{d}{dt}(t\frac{d}{dt}) \neq t\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}$.

[2] 証明は補題 3.16 とほぼ同じである。