(IV) 全微分型方程式の補足

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{0.1}$$

もし C^1-級関数 $\varphi(x,y)$ で

$$\partial\varphi/\partial x = P, \qquad \partial\varphi/\partial y = Q \tag{0.2}$$

なるものが見つかれば、φ の全微分は

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = Pdx + Qdy = 0$$

となり、等高線 $\varphi(x,y) = c$ がこの微分方程式の一般解となる。このように、(0.2) を満たす関数 φ が存在するとき、微分方程式 (0.1) は**全微分型** (または完全型) という。

この方程式の解法を説明するため**線積分**を復習しよう。

定義 0.1 xy 平面の領域 D での連続関数 $P(x,y), Q(x,y)$ と D 内の C^1 級曲線

$$C : x = x(t), y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

を考える。ただし、$(x(a), y(a))$ から $(x(b), y(b))$ に向け付ける。このとき、C に沿っての線積分を

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt, \qquad \int_C Q(x,y)\,dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt$$
$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy$$

と定める。曲線 C が C^1 級曲線 $C_1, \ldots, C_l$ をつないだ曲線 *($C = C_1 + \cdots + C_l$ とかく)* のときには、

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^{l} \int_{C_j} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

とする。

注意 0.1 *(1)* 線積分 $\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ は曲線 C のパラメータのとり方によらない。
(2) C の向きを逆にした曲線を $-C$ で表す。このとき、

$$\int_{-C} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

となる。

定理 0.1 (Green の定理) 有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線からなる境界 C をもった有界閉領域を K とし、$K \subset D$ とする。このとき、$P(x,y), Q(x,y)$ が D で C^1 級であれば

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_K \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy$$

となる。ただし、C は正の向き、即ち、K の内部を左側に見るように回るものとする。

証明: $\int_C P\,dx = -\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$ について。縦線領域 $K : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$ の場合に示す。$\partial K = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, ただし、$C_1 : x = t, y = \varphi_1(t)$ $(a \leq t \leq b)$, $C_2 : x = b, y = t$ $(\varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b))$, $-C_3 : x = t, y = \varphi_2(t)$ $(a \leq t \leq b)$, $-C_4 : x = a, y = t$ $(\varphi_1(a) \leq t \leq \varphi_2(a))$ とできるので、C_2, C_4 のとき $x' = 0$ に注意すれば、次を得る。

$$\int_C P\,dx = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt - \int_a^b Q(t,\varphi_2(t))\,dt = \int_a^b \Big(-\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial P}{\partial y}(t,s)\,ds\Big)\,dt = \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(t,s)\,dtds$$

一般の K の場合は K を縦線領域に分割すればよい。$\int_C Q\,dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$ も同様に示せる。 □

問 0.1 次の線積分を求めよ。[1]

(1) $\displaystyle\int_C y\,dx + x^2\,dy$, C は *(a)* $x = t, y = t^2$ $(0 \le t \le 1)$ *(b)* $x = t^2, y = t$ $(0 \le t \le 1)$

(2) $\displaystyle\int_C x^2\,dx + y^2\,dy$, C は $x^2 + y^2 = 1$ 上を $(1,0)$ から $(-1,0)$ へ *(a)* $y \ge 0$, *(b)* $y \le 0$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, C は $x^2 + y^2 = 1$ 上を $(1,0)$ から $(-1,0)$ へ *(a)* $y \ge 0$, *(b)* $y \le 0$

(4) $\displaystyle\int_C e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy$, C は $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ で正の向き

命題 0.2 単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上で関数 P, Q が C^1-級とする。このとき、*(0.2)* を満たす C^2-関数 φ が存在するための必要十分条件は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{0.3}$$

となることである。特に、このとき *3* 点 $(x_0, y_0), (x_0, y), (x, y)$ を順に結ぶ折れ線が Ω に含まれるならば、

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt \tag{0.4}$$

と φ を定義すれば、$\varphi(x,y) = c$ が微分方程式 *(0.1)* の解となる。

証明: もし (0.2) を満たす関数 φ が存在すれば、(0.3) を満たすことは φ が C^2-級より明らかである。逆に、(0.3) を満たすとする。このとき、$(x_0, y_0) \in \Omega$ を固定し、$(x, y) \in \Omega$ をとる。C を $(x_0, y_0), (x, y)$ を Ω 内で結ぶ経路 (区分的滑らかな曲線) とすると、線積分 $\displaystyle\int_C P(s,t)ds + Q(s,t)dt$ は、(x, y) のみで決まり経路 C によらない。実際、C' をもう一つの経路とし、$K \subset \Omega$ を $\partial K = C - C'$ となるように決める。Ω が単連結であるので $K \subset \Omega$ となる。このとき、$C - C'$ が正の向きであれば、Green の定理を適用して、

$$\int_C P(s,t)ds + Q(s,t)dt - \int_{C'} P(s,t)ds + Q(s,t)dt = \iint_K \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dsdt = 0$$

となる。正の向きでなければ $\partial K = C' - C$ として考えればよい。よって、

$$\varphi(x,y) = \int_C P(s,t)ds + Q(s,t)dt$$

と定義できる。次に、この φ が (0.2) を満たすことを示すために、C を修正する。$\delta > 0$ を $U := \{(s,t); |s-x| \le \delta, |t-y| \le \delta\} \subset \Omega$ となるように選び、C と ∂U の交点を (x_1, y_1) とし、C の (x_0, y_0) から (x_1, y_1) までの部分を C_1、3 点 $(x_1, y_1), (x_1, y), (x, y)$ を順に結ぶ折れ線を C_2 とする。このとき、

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \int_{C_1} P(s,t)ds + Q(s,t)dt + \int_{C_2} P(s,t)ds + Q(s,t)dt \\ &= \varphi(x_1,y_1) + \int_{x_1}^{x} P(s,y)\,ds + \int_{y_1}^{y} Q(x_1,t)\,dt\end{aligned}$$

となる。これより、$\partial\varphi/\partial x = P$ は明らか。一方、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) &= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)\,ds + Q(x_1,y) = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)\,ds + Q(x_1,y) \\ &= Q(x,y) - Q(x_1,y) + Q(x_1,y) = Q(x,y)\end{aligned}$$

となるので、φ が (0.2) をみたすことがわかった。この φ が C^2-級であることは明らか。(0.4) については、上記証明で $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ の場合であるので証明は完了した。 □

[1]戸田著 微分積分学要論 学術図書 p.277 より

問題 0.1 解答: (1) (a) 5/6 (b) 13/15, (2) (a) $-2/3$ (b) $-2/3$, (3) (a) π (b) $-\pi$, (4) 0 (hint: Green の定理を用いよ)