微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 6 月 26 日[1]

§ 3.3 不定積分の計算の補足

例 3.a $I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+A)^m}\,dx$ とするとき、次の漸化式が成立する。

$$I_m = \frac{1}{2A(m-1)}\left\{\frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\}, \qquad m = 2, 3, \ldots.$$

これより、例えば次を得る。

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left\{\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a^2}\left\{\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}\right\} + C.$$

[A] **有理関数の積分** $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ の求め方 ($P(x), Q(x)$ は多項式)

1. $P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $g(x)$, 余りを $P_0(x)$ とすると

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{P_0(x)}{Q(x)}, \qquad (P_0(x) \text{ の次数}) < (Q(x) \text{ の次数})$$

   で $g(x)$ は多項式だから、$\displaystyle\int \frac{P_0(x)}{Q(x)}\,dx$ について考えればよい。

2. 次の部分分数展開に関する事実を用いる:

   $Q(x) = 0$ の相異なる根を $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$, $\beta_1 \pm \gamma_1\sqrt{-1}, \ldots, \beta_L \pm \gamma_L\sqrt{-1}$ ($\alpha_k, \beta_l, \gamma_l \in \mathbf{R}, \gamma_l \neq 0$) とすると、

$$Q(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_K)^{m_K}\cdot\{(x-\beta_1)^2+{\gamma_1}^2\}^{n_1}\cdots\{(x-\beta_L)^2+{\gamma_L}^2\}^{n_L}$$

   と因数分解できる ($m_1, \ldots, m_K, n_1, \ldots, n_L \in \mathbf{N}$)。次のように部分分数展開される:

$$\frac{P_0(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m_k}\frac{A_{k,i}}{(x-\alpha_k)^i} + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_L}\frac{B_{l,j}x + C_{l,j}}{\{(x-\beta_l)^2+{\gamma_l}^2\}^j}$$

3. 2 より $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^i}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{\{(x-\beta)^2+\gamma^2\}^j}\,dx$ を求めればよい。(積分定数を省略する。)

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^i}\,dx = A\log|x-\alpha| \quad (i=1), \qquad \int \frac{A}{(x-\alpha)^i}\,dx = -\frac{A}{i-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{i-1}} \quad (i \geq 2)$$

   $Bx + C = B(x-\beta) + B\beta + C$ で、$t = (x-\beta)^2 + \gamma^2$, $u = x - \beta$ とおくと、

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{\{(x-\beta)^2+\gamma^2\}^j}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{2(x-\beta)}{\{(x-\beta)^2+\gamma^2\}^j}\,dx + \int \frac{B\beta+C}{\{(x-\beta)^2+\gamma^2\}^j}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{1}{t^j}\,dt + (B\beta + C)\int \frac{1}{(u^2+\gamma^2)^j}\,du\end{aligned}$$

   となり、特に右辺第 2 項は例 3.a の漸化式により計算できる。

例 3.6' (1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$　(2) $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx$　を求めよ。

問題 22 次の不定積分を求めよ。[2]

(1) $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$　　(2) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$　　(3) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$　　(4) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$

---

[1] http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html からもダウンロードできます。

[2] **問題 22** 解答: (積分定数は略す) (1) $\frac{1}{2}(x^2 - \log(x^2+1))$, (2) $2\log|\frac{x}{x-1}| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$, (3) $\frac{1}{3}(\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$, (4) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x-1))$,

以下、$P(x,y), Q(x,y)$ を x と y の多項式とし、$R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ を有理関数とする。

[B] 無理関数の積分

1) $I = \displaystyle\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,dx \quad (ad-bc \neq 0,\, n \geq 2)$

$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおくと、$t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ より $x = \dfrac{dt^n - b}{-ct^n + a}$. よって、このように置換することで有理関数の積分に帰着される。($t = \sqrt[n]{\dfrac{cx+d}{ax+b}}$ と置換したほうが簡単な場合もある。)

2) $I = \displaystyle\int R(\, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx$

(1) $a > 0$ のとき: $t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c}$ とおくと、$x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$ となるので、x を t に置換することで有理関数の積分に帰着される。

(2) $a < 0$ のとき: $ax^2+bx+c=0$ の 2 根を α, β $(\alpha < \beta)$ とするとき[3]、$t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ $(\alpha < x < \beta)$ と変数変換すれば、$t^2 = \dfrac{x-\alpha}{\beta-x}$ より $x = \dfrac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1}$ となるので、このように置換することで有理関数の積分に帰着される。

例 3.7 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ を求めよ。

例 3.8' (1) $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$ (2) $I = \displaystyle\int \sqrt{x(1-x)}\,dx$ を求めよ。

問題 23 次の不定積分を求めよ。[4]

(1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (2) $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (3) $I = \displaystyle\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx$ (4) $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

(5) $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (6) $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5x-6-x^2}}\,dx$ (7) $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ (8) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

[C] 三角関数の積分 $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと、$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ で $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ となるから、このように置換することで有理関数の積分に帰着される。

注意: $\cos^2 x, \sin^2 x, \tan x$ の関数の場合、$t = \tan x$ とすれば、$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ となるので、こう置換したほうが容易に計算できる。

例 3.9' (1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (2) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ を求めよ。

問題 24 次の不定積分を求めよ。[5]

(1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ (2) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{a+\cos x}$ $(a > 1)$ (3) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3+2\tan x}$ (4) $I = \displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 3}\,dx$

[3] $a < 0$ かつ $ax^2+bx+c > 0$ となる x が (区間として) あるので、$ax^2+bx+c=0$ は相異なる 2 根をもつ。

[4] **問題 23** 解答: (積分定数は略す) (1) $\log|x+\sqrt{x^2-4}|$, (2) $\sqrt{x^2+2x+2} - \log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$, (3) $\frac{4}{5}(1-\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^{3/2}$ ($t = 1-\sqrt{x}$ とおく) (4) $-2\log(1+\sqrt{x}) + \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 2\sqrt{x}$, (5) $\sqrt{(1-x)(x+1)} - 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, (6) $5\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x-2}{3-x}} - \sqrt{5x-6-x^2}$, (7) $\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}+1}\right|$, (8) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}} + \log\frac{(x^{1/6}-1)^2}{x^{1/3}+x^{1/6}+1} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\right)$

[5] **問題 24** 解答: (積分定数は略す) (1) $\log|\tan\frac{x}{2}|$, (2) $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\tan\frac{x}{2}\right)$, (3) $\frac{2}{13}\log|\sin x + \frac{3}{2}\cos x| + \frac{3}{13}x$, (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x) - x$