微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 5 月 18 日[1]

§ 1.3 **連続関数**の補足問題 (続き) [2]

17.　(中間値の定理の問題)　以下を示せ。

(1)　$f(x)$ が $[0,1]$ で連続で $0 < f(x) < 1$ をみたせば、$f(x) = x$ は $0 \le x \le 1$ において少なくとも一つ解を持つ。

(2)　$f(x)$ が有界閉区間 $I = [a,b]$ で連続ならば、$f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ を満たす $c \in I$ が存在する。

(3)　$f(x)$ が $[-1,1]$ で連続であって $f(1) = f(-1) = 0$ ならば、原点を通る直線は $y = f(x)$ のグラフと必ず交わる。

18.　次の極限値を求めよ。ただし、$a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(b^{1/n}-1)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$　(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(2\log(1+x)-\log(1+2x)\right)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{x}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(\mathrm{Arccos}\, x)^2}{x-1}$　(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arctan}\, x}{x}$

§ 2.1 **導関数**の補足問題 [3]

19.　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\mathrm{Arccos}(\sin x)$　(2) $\mathrm{Arcsin}(\cos x)$　(3) $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}$

(4) $\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$　(5) $\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

20.　次の関数の n 次導関数を求めよ。(ただし、a, b は定数。)

(1) e^{ax+b}　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　(3) $e^x\cos x$　(4) $\sin^3 x$　(5) $\cos ax \sin bx$　(6) $x^{n-1}\log x$

§ 2.2 **平均値の定理とテイラーの定理**の補足問題 [4]

21.　平均値の定理を用いて次を示せ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}\quad(-1 \le x \le 1)$　(2) $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & (x>0) \\ -\pi/2 & (x<0)\end{cases}$

(3) $\mathrm{Arccos}(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} - x\quad\left(|x| \le \dfrac{\pi}{2}\right)$　(4) $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\, x\quad(x>0)$

(5) $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\, x\quad(x \in \mathbb{R})$　(6) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\, x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\quad(-1 \le x \le 1)$

---

[1] http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html からもダウンロードできます。

[2] **略解: 17.** (1) $\varphi(x) = f(x) - x$ とおく。仮定より $\varphi(0) > 0$, $f(1) < 0$ となるので、中間地の定理より $\varphi(c) = 0$ となる $[0,1]$ の点 c がある。このとき、$f(c) = c$ となり、この c が解である。(2), (3) は野本・岸著「解析演習」サイエンス社 p.41–42 を見よ。**18.** (1) e^a (2) e (3) $\log b$ (4) $\log b$ (5) e (6) $e^{-1/2}$ (7) 1 (8) 1 (9) $-1/2$ (10) 1

[3] **略解: 19.** (1) $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$ (2) $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ (3) 0 (4) $\frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$ (5) $1/2$ $(x>0)$, $-1/2$ $(x<0)$, **20** (1) $a^n e^{ax+b}$ (2) $(-1)^n n!\left\{(x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1}\right\}$ (3) $2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ (4) $\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 3^n 3\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ (5) $\frac{1}{2}\left[(a+b)^n \sin\left\{(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + (b-a)^n \sin\left\{(b-a)x + \frac{n\pi}{2}\right\}\right]$ (6) $\frac{(n-1)!}{x}$

[4] **略解: 21.** 教科書 p.56 の定理 2.9 を用いる。例えば (1) は、$f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$ と $-1 \le x < 1$ に対し、$f(x)$ は $(-1,x)$ で微分可能で $[-1,x]$ で連続だから、平均値の定理により $f(x) - f(1) = f'(c)$, $-1 < c < x$ とできる。ここで $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ であるから $f'(c) = 0$. よって、$f(x) = f(1) = \pi/2$ と、証明できる。