微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 5 月 11 日[1]

§ 1.2 **関数の極限**の補足問題 [2]

9.　$|f(x)| \to 0$ $(x \to a)$ のとき、$f(x) \to 0$ $(x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ。

10.　$f(x) \to A$ $(x \to a)$ のとき、$|f(x)| \to |A|$ $(x \to a)$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ。

11.　次を示せ。

(1)　$f(x) \to A$ $(x \to a)$ であれば、$f(x) \to A$ $(x \to a+0)$ かつ $f(x) \to A$ $(x \to a-0)$ となる。

(2)　$f(x) \to A$ $(x \to a+0)$ かつ $f(x) \to A$ $(x \to a-0)$ であれば、$f(x) \to A$ $(x \to A)$ となる。

12.　$g(x) \le f(x) \le h(x)$ $(x \ge L)$ であり、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = A$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = A$ であれば、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ となることを示せ。

13.　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x^2-1)}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos 3x - 1}{\sin^2 x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+x-2}{|x-1|}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+x-2}{|x-1|}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}}{(1+2x)^{1/3}-(1-2x)^{1/3}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x})$　　(9) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

14.　$x \to \infty$ のとき $\sin x$ が収束しないことを教科書 p.14 の定義に基づいて示せ。

§ 1.3 **連続関数**の補足問題 [3]

15.　次の値を求めよ。

(1)　$\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　(3)　$\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{2}$　　(4)　$\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　　(5)　$\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3}$

16.　次の関数が $(-\infty, \infty)$ で一様連続か調べよ。

(1)　$\sin x$　　(2)　$e^{-|x|}$　　(3)　x^2　　(4)　$\sin^2 x$　　(5)　$\sin x^2$

---

[1] http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html からもダウンロードできます。

[2] **略解: 9.** $|f(x)-0| = |f(x)| = \big||f(x)|-0\big|$ に注意して ε-δ 論法を用いよ。
10. $\big||f(x)|-|A|\big| \le |f(x)-A|$ に注意して ε-δ 論法を用いよ。
11. (1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。仮定より、ある $\delta > 0$ があって、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-A| < \varepsilon$. よって、$0 < x-a < \delta$ ならば $|f(x)-A| < \varepsilon$ となるから、$f(x) \to A$ $(x \to a+0)$ を得る。後者も同様。
(2) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。仮定の前者より、ある $\delta_1 > 0$ があって、$0 < x-a < \delta_1$ ならば $|f(x)-A| < \varepsilon$. 仮定の後者より、ある $\delta_2 > 0$ があって、$0 < a-x < \delta_2$ ならば $|f(x)-A| < \varepsilon$. よって、$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば $\delta > 0$ で、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $0 < x-a < \delta \le \delta_1$ もしくは $0 < a-x < \delta \le \delta_2$ が成立するのでいずれにせよ $|f(x)-A| < \varepsilon$ となる。よって、示された。
12. $\varepsilon > 0$ を任意にとる。第 2 の仮定よりある $M_1 > 0$ があって $x > M_1$ ならば $|g(x)-A| < \varepsilon$, 特に、$g(x) > A-\varepsilon$ となり、第 3 の仮定よりある $M_2 > 0$ があって $x > M_2$ ならば $|h(x)-A| < \varepsilon$, 特に、$h(x) < A+\varepsilon$ となる。よって、$M = \max\{L, M_1, M_2\}$ とおけば、$x > M$ ならば $x > M_1$ かつ $x > M_2$ となり、また $x > L$ より第 1 の仮定が使えて、$A-\varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < A+\varepsilon$, 即ち、$|f(x)-A| < \varepsilon$ となるので主張は示された。
13. (1) 1 (2) 2 (3) -9 (4) 3 (5) -3 (6) 3/10 (7) 1 (8) 0 (9) 1/2　ヒント: 次のように変形して考えよ。(2) $\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\frac{x+1}{\cos(x^2-1)}$
(3) $-(\frac{\sin 3x}{3x}\frac{x}{\sin x})^2\frac{9}{\cos 3x+1}$ (6) $\frac{a^5-b^5}{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}\frac{c^2+cd+d^2}{c^3-d^3}$, $a = (1+x)^{1/5}, b = (1-x)^{1/5}$, $c = (1+2x)^{1/3}, d = (1-2x)^{1/3}$
(8) $|2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}| \le 2|\sin\frac{a}{2(\alpha+\beta)}|$, $\alpha = \sqrt{x+a}, \beta = \sqrt{x}$ (9) $t = -x$ とおけ
14 もしある値 A に収束すれば、ある M があって、$x > M$ ならば $|\sin x - A| < 1/2$ とできる。即ち、$x, y > M$ ならば $|\sin x - \sin y| \le |\sin x - A| + |\sin y - A| < 1$ となる。しかし、この実数 M と 2π に対し Archimedes の公理によりある自然数 n があって $2\pi n > M$ とできる。このとき、$2\pi n + \pi/2 > M$ であるが、$|\sin 2\pi n - \sin(2\pi n + \pi/2)| = 1$ となるので矛盾である。

[3] **略解: 15.** (1) $\pi/6$ (2) $-\pi/6$ (3) $\pi/3$ (4) $2\pi/3$ (5) $\pi/3$,　**16** は 野本・岸著「解析演習」サイエンス社 pp.40–41 を見よ。