微分積分学 AD I, 数学序論演習 I　　2007 年 4 月 27 日[1]

§ 1.1 **数の基本性質と数列の極限**の補足問題 [2]

1.　b を正数とする。公理 I (Archimedes の公理) から次を示せ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{n}}=0$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} bn=\infty$

2.　数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$ を示せ。

3.　$S\subset\mathbf{R}$, $S\neq\emptyset$ とするとき、次を示せ。

(1)　S が上に有界であるならば、任意の $\varepsilon>0$ に対してある $a\in S$ が存在して $a>\sup S-\varepsilon$ とできる。

(2)　S が下に有界であるならば、任意の $\varepsilon>0$ に対してある $a\in S$ が存在して $a<\inf S+\varepsilon$ とできる。

4.　(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=({a_n}^2+1)/2\quad(n\in\mathbf{N})$ とする。$\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=1/(a_1+\cdots+a_n)\quad(n\in\mathbf{N})$ とする。$\{a_n\}$ が下に有界な単調減少数列であることを示し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

5.　次の数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n+1}\qquad(n\in\mathbf{N})$

(2)　$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1$ とし、$a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}\quad(n=3,4,\ldots)$

6.　数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとし、自然数からなる数列 $\{m_k\}$ が ∞ に発散するとする。このとき、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_{m_k}=\alpha$ を示せ。注意: これより特に、数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ も α に収束する。

§ 1.3 **連続関数**の補足問題 [3]

7.　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(a^x+b^x+c^x)^{1/x}\quad(0<a<b<c)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(a^x+b^x+c^x)^{1/x}\quad(0<a<b<c)$

8.　逆三角関数について次を示せ。

(1)　$\mathrm{Arcsin}\,x+\mathrm{Arccos}\,x=\dfrac{\pi}{2},\ -1\le x\le 1.$

(2)　$2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$　　(3)　$4\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$

---

[1] http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html からもダウンロードできます。

[2] **略解: 1.** 定理 1.5 の証明を真似ればよいので略す。　**2.** $\big||a_n|-|\alpha|\big|\le|a_n-\alpha|$ に注意して ε-N 論法を用いよ。
3. (1) 背理法により示す。$\sup S=\alpha$ とかく。ある $\varepsilon_1>0$ があって任意の $a\in S$ に対し $a\le\alpha-\varepsilon_1$ となると仮定する。これは、$\alpha-\varepsilon_1$ が S の上界となることを意味するので、これは $\sup S=\alpha$ と矛盾する。(2) も同様に証明できる。
4, 5 は 野本・岸著「解析演習」サイエンス社 pp.14–15 を見よ。 **6** $\varepsilon>0$ を任意にとる。仮定より、ある $N\in\mathbf{N}$ があって、$n\ge N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ とできる。さらに、$\lim_{k\to\infty}m_k=\infty$ より、ある $K\in\mathbf{N}$ があって、$k\ge K$ ならば $m_k>N$ とできる。これを併せて、$k\ge K$ ならば $|a_{m_k}-\alpha|<\varepsilon$ となるから、証明は完了した。

[3] **略解: 7.** (1) $c<(a^x+b^x+c^x)^{1/x}<3^{1/x}c$ と $\lim_{x\to\infty}3^{1/x}=1$ より、(与式)$=c$. (2) $y=-x$ とおき (1) に帰着し計算することで、(与式)$=a$ を得る。**8** は 野本・岸著「解析演習」サイエンス社 pp.30–31 を見よ。((2) は自分で考えてください。)