微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　テスト 1 回目　出題日 2006 年 11 月 7 日

注意　定数 γ に対する $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ の発散・収束などの定理は証明なしに用いても構わない。

1.　次の級数が絶対収束か条件収束か発散かを調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-3n^2+3}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin^2\frac{1}{n}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

2.　$f_n(x)=n^p x^2 e^{-nx}$ とする。このとき、関数列 $\{f_n(x)\}$ が $I=[0,1]$ 上で一様収束するような実数 p の範囲を決定せよ。

3.　次のべき級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n2^n x^{3n}$

4.　フィボナッチの数列 $\{a_n\}$: $a_0=a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n\geq 1)$ によってできるべき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots$$

の収束半径を求めよ。また、この和 $f(x)$ を求めよ。

5.　$\displaystyle f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin n\theta$ とおくとき、次を示せ。$(0<a<1)$

(1)　右辺の級数は θ に関して $[0,2\pi]$ で一様収束している。

(2)　$f(\theta)$ は微分可能で、$\displaystyle f'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}na^n\cos n\theta.$

(3)　(a)　$\displaystyle f(\theta)=\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$,　(b)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\sin k\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta=\pi a^{k-1}\quad(k\in\mathbf{N})$