微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2007 年 2 月 13 日の試験の解答の要点[1]

1　$D: 4(2x+y)^2+y^2 \le 4$ とすると、写像 $u=2(2x+y), v=y$ により D は $\Omega: u^2+v^2 \le 4$ に 1 対 1 に写され $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{4}(\ne 0)$ であるから、

$$\text{面積 } S=\iint_D dxdy=\iint_\Omega \frac{1}{4}dudv=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-u^2}}^{\sqrt{4-u^2}} dv=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-u^2}\,du=\pi.$$

2　$D: 1 \le x^2+y^2 \le 4, \frac{1}{\sqrt{3}}x \le y \le \sqrt{3}x$ とすると、写像 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ により D は $\Omega: 1 \le r \le 2, \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ に 1 対 1 に対応し、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r\theta)}=r(\ne 0)$ であるから、

$$\text{体積 } V=\iint_D \mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}\,dxdy=\iint_\Omega \mathrm{Arctan}\tan\theta\,rdrd\theta=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\theta\,d\theta\int_1^2 r\,dr=\frac{\pi^2}{16}.$$

3　$z \ge 0$ の部分を考え 2 倍すればよい。$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ より、$1+{z_x}^2+{z_y}^2=\frac{1}{1-x^2-y^2}$. $D: x^2+y^2 \le x$ とすると、写像 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ により D は $\Omega: r \le \cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ に面積 0 の部分を除き 1 対 1 に対応し、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ で面積 0 を除き $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \ne 0$. よって、

$$\text{表面積 } S=2\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy=2\iint_\Omega \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,drd\theta=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$
$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big[-\sqrt{1-r^2}\big]_0^{\cos\theta}\,d\theta=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\theta|)\,d\theta=4\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\,d\theta=2(\pi-2).\ (\text{脚注}^2)$$

4　(1)　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t, \dfrac{dy}{dt}=\cos t$ より、(与式)$=\displaystyle\int_0^\pi(-\sin^2 t+2\cos^2 t)\,dt=\frac{\pi}{2}$.

(2)　$C_1: x=t, y=t^2, 0 \le t \le 1$, $C_2: x=t^2, y=t, 0 \le t \le 1$ とすると、$C=C_1-C_2$ より[3]

(与式)$=\displaystyle\int_{C_1}x^2y\,dx+y^3\,dy-\int_{C_2}x^2y\,dx+y^3\,dy=\int_0^1(t^4+2t^7)\,dt-\int_0^t(2t^6+t^3)\,dt=-\frac{3}{35}$.

(3)　$C': x^2+y^2=1$ (正の向きとする) とおくと、ヒントの K の境界は $C-C'$ となる。また、D を $\mathbf{R}^2$ から点 $(0,0)$ を除いて得られる領域とすると、$K \subset D$ で、$\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{x}{x^2+y^2}$ は D で C^1-級となる。よって、Green の定理より

(与式)$-\displaystyle\int_{C'}\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\iint_K\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}\Big)\Big\}\,dxdy=\iint_K 0\,dxdy=0.$

ここで、$C': x=\cos t, y=\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ とできるので、$\displaystyle\int_{C'}\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_0^\pi dt=2\pi$.

以上より、(与式)$=2\pi$ を得る。

5　(1)　$y \ne 0$ のとき、$\int\frac{1}{y}\,dy=-\int\frac{2}{x-1}\,dx$. よって、$\log|y|=-2\log|x-1|+C$, 即ち、$y=\pm e^{-C}(x-1)^{-2}$. ここで、$\pm e^{-C}$ を改めて C とおき、また、$y=0$ も解だから、解は $y(x-1)^2=C$ となる。

(2)　$u=\frac{y}{x}$ とおくと $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$. このとき与式は $(1+u)^2(\frac{du}{dx}+u)=2u^2$, 即ち、$x(1+u)^2\frac{du}{dx}=-u(1+u^2)$ となる。よって、$u \ne 0$ のとき $\int\frac{(u+1)^2}{u(u^2+1)}\,du=-\int\frac{1}{x}\,dx$. ここで、(左辺)$=\int\{\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2+1}\}\,du=\log|u|+2\,\mathrm{Arctan}\,u$ より、$\log|u|+2\,\mathrm{Arctan}\,u=-\log|x|+C$. 以上より、解は $\log|y|+2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}=C$, $y=0$ となる。

(3)　$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+1}$ を解いて、$y=\frac{C}{x+1}$. よって、与式の解を $y=\frac{C(x)}{x+1}$ とおくと、$\frac{dy}{dx}=\frac{C'(x)}{x+1}-\frac{y}{x+1}$ となるから、$C'(x)=(x+1)\log(x+1)$. よって、$C(x)=\int(x+1)\log(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2+C$ となるから、解は $y=\frac{1}{2}(x+1)\log(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{C}{x+1}$.

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は **3**, **4** (3) が 15 点、そのほかは 10 点の、満点 **100 点**である。

[2] この行の最初の等号の前の積分は $\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ は $r=1$ のとき発散するから広義積分である。この場合 $\sqrt{1-r^2}$ は $r=1$ で連続だからこのまま計算することができる。

[3] C_1-C_2 は C_1 と $-C_2$ を併せたものという意味で用いている。(3) の $C-C'$ も同様。