微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2007 年 1 月 30 日の試験の解答の要点[1]

1　D を図示することを (特に (1), (2), (3) について) 強く勧めるのだが、ここでは略す。

(1)　D を横線集合で表すと $D: \sqrt{1-y} \le x \le y+2, 0 \le y \le 1$ となるから、

$$(\text{与式})= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y}}^{y+2} xy\,dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}y(y+2)^2 - \frac{1}{2}y(1-y) \right\} dy = \frac{41}{24}.$$

(2)　$K: -\sqrt{4y-y^2} \le x \le \sqrt{4y-y^2}, 0 \le y \le 4$ より、

$$(\text{与式})= \int_0^4 \sqrt{y}dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx = \int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy = \frac{256}{15}.$$

(3)　$D: x \le y \le r, 1 \le x \le e$ より、

$$(\text{与式})= \int_1^e dx \int_x^e (\log y - 2\log x)\,dy = \int_1^e (x\log x + x - 2e\log x)\,dx = \frac{3}{4}e^2 - 2e - \frac{1}{4}.$$

(4)　$u = x+y, v = x-y$ とおくと $x = \frac{1}{2}(u+v), y = \frac{1}{2}(u-v)$. この変換で K は $\Omega: 0 \le u \le 1, -1 \le v \le 1$ に一対一で対応し、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}(\ne 0)$. よって、

$$(\text{与式})= \iint_\Omega \frac{1}{2}(u^2+v^2)e^{-u}\left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-u}\,du \int_{-1}^1 (u^2+v^2)\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2+\frac{1}{3})e^{-u}\,du = \frac{7}{6} - \frac{8}{3e}.$$

(5)　$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、$(x^2+y^2)^2 \le y^2 - x^2$ に代入して $r^4 \le -r^2\cos 2\theta$. ここで、$-\cos 2\theta \ge 0$ に注意して、この変換で K は $\Omega: r^2 \le -\cos 2\theta, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \le \theta \le \frac{7\pi}{4}$ に面積 0 の集合を除いて一対一で写され、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \ne 0$ であるから、

$$(\text{与式})= \iint_\Omega r^2|r|\,drd\theta = 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{-\cos 2\theta}} r^3\,dr = 2\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sqrt{-\cos 2\theta})^4\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

ここで、第 2 の等号は K の x 軸に関する対称性を用いた。

(6)　$x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ とおくと、T は $\Omega: 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ に体積 0 の集合を除いて一対一で写される。よって、$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r\sin\varphi$ で体積 0 を除き $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \ne 0$ であるから、

$$(\text{与式})= \iiint_\Omega \sqrt{1-r^3}|r^2\sin\varphi|\,drd\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^3}r^2\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi/2}\Big[-\frac{2}{9}(1-r^3)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{9}.$$

2　(1) $K_n: 1 \le x \le n, 1 \le y \le n$ とおくと、$\{K_n\}$ は D の増加近似列で、$\frac{1}{(x+y)^5} \ge 0$ であるから、

$$(\text{与式})= \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{dx\,dy}{(x+y)^5} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n dx \int_1^n \frac{dy}{(x+y)^5} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \left\{ \frac{1}{4(x+1)^4} - \frac{1}{4(x+n)^4} \right\} dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{12\cdot 2^3} - \frac{1}{6(n+1)^3} + \frac{1}{12(2n)^3} \right\} = \frac{1}{96}.$$

(2)　$K_n: x^2+y^2 \le (1-\frac{1}{n})^2$ とおくと、$\{K_n\}$ は D の増加近似列で、$\log(1-x^2-y^2) \le 0$ であるから、$(\text{与式})= \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \log(1-x^2-y^2)\,dxdy$. ここで、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、K_n は $\Omega_n: 0 \le r \le 1-\frac{1}{n}, 0 \le \theta \le 2\pi$ に面積 0 の集合を除いて一対一で対応し、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ で面積 0 を除き $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \ne 0$. よって、$\iint_{K_n} \log(1-x^2-y^2)\,dxdy = \iint_{\Omega_n} r\log(1-r^2)\,drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-\frac{1}{n}} r\log(1-r^2)\,dr$

$$= \pi\Big[\{1-(1-\frac{1}{n})^2\}(\log\{1-(1-\frac{1}{n})^2\}-1)-1\Big]$$ より、(与式)$= -\pi$ を得る。

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は **1** (5), **2** (1), (2) が 15 点、そのほかは 10 点の、満点 **95 点**である。