微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2007 年 1 月 9 日の試験の解答の要点[1]

1 [5+10] (1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x+y$ とおくと、$f_x=2x+y+1, f_y=x+2y+1, f_{xx}=2, f_{xy}=1, f_{yy}=2$. $f_x=f_y=0$ より $x=y=-\frac{1}{3}$ でこれが極値の候補となる。このとき $H=f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=3>0$, $f_{xx}>0$ となるから、$(x,y)=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ のとき極小値 $-\frac{1}{3}$ をとる。

(2) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$ とすると、$f_x=2x-2y^2, f_y=-4xy+4y^3-5y^4$, $f_{xx}=2, f_{xy}=-4y, f_{yy}=-4x+12y^2-20y^3$. $f_x=f_y=0$ より $x=y=0$ でこれが極値の候補となる。このとき $H=f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$ となり、これでは極値かわからない。しかし、$(x,y)=(t^2,t)$ とおくと $f(t^2,t)=-t^5$ となり、$t>0$ なら $f(t^2,t)<0$, $t<0$ なら $f(t^2,t)>0$ となる。よって、$(x,y)=(0,0)$ の近くで正にも負にもなるので、これは極値ではない。以上より、極値は存在しない。

2 [15] 与式の両辺を x で微分して $\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2})=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}$. よって、$(x-y)y'=x+y$ ($\cdots$ とする) となり、$y'=\frac{x+y}{x-y}$ を得る。

の両辺をさらに x で微分して、$(1-y')y'+(x-y)y''=1+y'$. よって、$y''=\frac{1+(y')^2}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

3 [6+14] (1) 両辺を x で偏微分して $2x+15z^2z_x-2y-2yz_x=0$ ($\cdots$). よって、$z_x=\frac{2y-2x}{15z^2-2y}$.
両辺を y で偏微分して $4y+15z^2z_y-2x-2(z+yz_y)=0$ ($\cdots$). よって、$z_y=\frac{2x+2z-4y}{15z^2-2y}$.

(2) $z_x=z_y=0$ より、$y-x=0, x+z-2y=0$. これと与式からなる 3 元 2 次方程式を解くと、実数解は $(x,y,z)=(1,1,1)$ のみ。z_{xx} を求めるために、 をさらに x で偏微分して、$2+30z{z_x}^2+15z^2z_{xx}-2yz_{xx}=0$. よって、$z_{xx}=\frac{-2-30z{z_x}^2}{15z^2-2y}$ (注[2])。次に を y で偏微分して、$30zz_yz_x+15z^2z_{xy}-2-2z_x-2yz_{xy}=0$. よって、$z_{xy}=\frac{2+2z_x-30zz_xz_y}{15z^2-2y}$. を y で偏微分して、$4+30z{z_y}^2+15z^2z_{yy}-4z_y-2yz_{yy}=0$ より $z_{yy}=\frac{4z_y-4-30z{z_y}^2}{15z^2-2y}$.
$H=z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2$ とおく。$(x,y)=(1,1)$ のとき $z=1$ だから、$H=\frac{-2}{15-2}\frac{-4}{15-2}-(\frac{2}{15-2})^2=\frac{4}{13^2}>0$ で $z_{xx}=-\frac{2}{13}<0$ より極大。以上より、z は $(x,y)=(1,1)$ のとき極大値 1 をとる。

4 [10] 第 1 式を偏微分して、$2x+2uu_x+2vv_x=0, 2y+2uu_y+2vv_y=0$. 第 1 式を偏微分して、$y+vu_x+uv_x=0, x+vu_y+uv_y=0$. これを行列で表示して $\begin{pmatrix}u & v\\ v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x & -y\\ -y & -x\end{pmatrix}$. よって、$\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}=\frac{1}{u^2-v^2}\begin{pmatrix}u & -v\\ -v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & -y\\ -y & -x\end{pmatrix}=\frac{1}{u^2-v^2}\begin{pmatrix}yv-xu & xv-yu\\ xv-yu & yv-xu\end{pmatrix}$.
以上より、$u_x=\frac{yv-xu}{u^2-v^2}, u_y=\frac{xv-yu}{u^2-v^2}, v_x=\frac{xv-yu}{u^2-v^2}, v_y=\frac{yv-xu}{u^2-v^2}$.

5 [10] $f(x,y)=x^3+y^3$, $g(x,y)=4x^2+y^2-4$ とおく。$\{(x,y);g(x,y)=0\}$ は有界閉集合で $f(x,y)$ は連続なのでその最大値・最小値は必ず存在し、それは広義の極値となる。広義の極値を (a,b) とする。Lagrange の未定乗数法より、ある λ が存在して $4a^2+b^2=4$, $3a^2+\lambda\cdot 8a=0$, $3b^2+\lambda\cdot 2b=0$. これを解いて $(a,b,\lambda)=(0,\pm2,\mp3),(\pm1,0,\mp\frac{3}{8}),(\pm\frac{8}{\sqrt{65}},\pm\frac{2}{\sqrt{65}},\pm\frac{3}{\sqrt{65}})$ (複合同順、以降も同様[3])。このとき、$f(a,b)$ の値は順に $\pm8,\pm1,\pm\frac{8}{\sqrt{65}}$. 以上より、$(x,y)=(0,2)$ のとき最大値 8, $(x,y)=(0,-2)$ のとき最小値 -8 をとる。
別解: $x=\cos\theta, y=2\sin\theta$ とおいて、$\varphi(\theta)=\cos^3\theta+8\sin^3\theta$ の最大値・最小値を求めてもよい (が、結構大変)。

6 [10] $f(x,y,t)=x\cos t+y\sin t-p$ とおくと、$f_t=-x\sin t+y\cos t$. よって、$f=0, f_t=0$ を連立させて t を消去することで、$x^2+y^2=p^2$ を得る。ところで、$f_x=\cos t, f_y=\sin t$ であるから特異点は存在しないので、求める包絡線は $x^2+y^2=p^2$ となる。

---

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **80 点**である。

[2] 本来はこのままでは z_{xx} が求まったといえないが、極値問題の場合 $z_x=z_y=0$ を後で代入するのでこの形にとどめる。z_{xy}, z_{yy} についても同様。

[3] この方程式が解けた者はいなかった。$a=0$ や $b=0$ の場合もあることを忘れている。