微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 11 月 28 日の試験の解答の要点[1]

1 [5]　$x = 1 + r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、$(x,y) \to (0,0)$ と $r \to 0$ は同値となる。$\frac{x^2+y^2+3x-4y-4}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = r + 5\cos\theta - 4\sin\theta \to 5\cos\theta - 4\sin\theta$ $(r \to 0)$ となるが、これは θ ごとに異なる値となるから極限は存在しない。

2 [8+7]　(1) 連続性: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと[2]、$(x,y) \to (0,0)$ と $r \to 0$ は同値となる。$0 \le \sqrt{|xy|} = r\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|} \le r \to 0$ $(r \to 0)$ より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ であるから連続である。

偏微分可能性: $f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, $f_y(0,0) = \displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$ より偏微分可能。

(2)　$\varepsilon(0,0,h,k) = f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0) = \sqrt{|hk|}$ に対して、$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(0,0,h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が存在しないことを示せばよい。このため、$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと、$(h,k) \to (0,0)$ と $r \to 0$ は同値。しかし、$\frac{\varepsilon(0,0,h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}$ となり、θ ごとに異なる値となる。これは $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(0,0,h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ が存在しないことを示している。

3 [15]　$z_x = 2x + y, z_y = x - 3y^2$. よって、接平面の方程式は $z - 1 = 3(x-1) - 2(y-1)$ となる。この平面に直交する方向ベクトルは $(3,-2,-1)$ であるから、直線の方程式は $x = 6 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ となる。接平面の方程式に直線の方程式を代入し $-t - 1 = 3(6 + 3t - 1) - 2(2 - 2t - 1)$ を解くと $t = -1$ となるから、接平面と直線と交点は $(3,4,1)$ である。よって、距離は $\sqrt{(6-3)^2 + (2-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{14}$.

4 [10]　$z_x = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{x}{2t}\right)$ より、$z_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\frac{1}{2t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)$.
$z_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\frac{x^2}{4t^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)$. よって、$z_t = z_{xx}$. [3]

5 [5]　$g(x,y) = f(x,y,x)$ とすれば $g(x,y)$ は C^n 級であるからその n 次偏導関数は偏微分する順にはよらない。よって、x, y から重複を許し n 個選ぶ方法である。これは n 個を 2 つに分ける (0 個も許す) 方法、例えば $\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}}$ であれば○｜○○…○と見なせることに注意すると、n 次偏導関数の個数は「○を n 個」「｜を 1 つ」の同じものを含む順列に等しいので、$\frac{(n+1)!}{n!1!} = n + 1$ 通りとなる。[4]

6 [20]　(1)　$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2z}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$, $\frac{dy}{dt} = a\cos t$, $\frac{dz}{dt} = h$ より、$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{2h^2t}{1+(a^2+h^2t^2)^2}$. (減点理由は脚注を見てください。[5][6])

(2)　$z_u = z_x x_u + z_y y_u = y\frac{v}{\sqrt{1-(uv)^2}} + x\left(-\frac{v}{\sqrt{1-(uv)^2}}\right) = \frac{v}{\sqrt{1-(uv)^2}}(\mathrm{Arccos}\,uv - \mathrm{Arcsin}\,uv)$.

7 [10]　x^3y^2 の係数は $\frac{1}{5!}\binom{5}{3}\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}(0,0)$ であるから、$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}(x,y) = 2^3e^{2x}3^2(-\cos 3y)$ より、$-\frac{1}{2!3!}2^3 3^2 = -6$.

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **80 点**である。

[2] 問題 1 では $x - 1 = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき極限が θ ごとに違う値となることを示せばよかった。しかし、この問題において $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき、すべての θ で $r \to 0$ のときの極限が 0 であるから、その極限は 0 とするのは誤りである。実際、$f(x,y) = 0$ ($|y| \ge x^2$ または $y = 0$), $f(x,y) = 1$ (そのほか) とおくと、すべての θ で $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$ $(r \to 0)$ であるが、$\lim_{t\to 0} f(t, \frac{t^2}{2}) = 1$ となり、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を示すためには、解答のように $\lim_{r\to 0}\varphi(r) = 0$ をみたす関数 $\varphi(r)$ を用いて $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le \varphi(r)$ となること示さなければならない。(この問題の場合は「$(x,y) \to (0,0)$ ならば $\underline{x \to 0 \text{ かつ } y \to 0 \text{ であるから}}$ $\sqrt{|xy|} \to 0 = f(0,0)$ となり連続」と述べれば正解である。ただ、下線部が書かれた解答はありませんでした。)

[3] これは熱伝導を表す偏微分方程式である。$\sqrt{4\pi}$ の理由は $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = 1$ とするためである (*cf.* 教科書 p.263 例 1)。

[4] この問題は、$f(x,y,z)$ について出題しようとして出題ミスをしたのである。一応、3 変数の場合の答えを書いておく (2 変数の場合とまったく同じであるが)。

C^n 級であるからその n 次偏導関数は偏微分する順にはよらない。よって、x, y, z から重複を許し n 個選ぶ方法である。これは n 個を 3 つに分ける (0 個も許す) 方法、例えば $\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y\partial z^{n-2}}$ であれば○｜○｜○○…○と見なせることに注意すると、n 次偏導関数の個数は「○を n 個」「｜を 2 つ」の同じものを含む順列に等しいので、$\frac{(n+2)!}{n!2!} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ 通りとなる。

[5] 通常、このような計算では最後に x, y, z を代入し、t の式で書くのが普通である。(教科書の解答を見てもあえてそのまま残す場合は書いた式の後に $(z = \dots)$ と書かれている。) 特に、この問題では代入後の式が大幅に簡略化されるため、代入していない答えは 4 点減点した。(2) の場合、簡略化されるという訳ではないので、減点は 2 点とした。尚、前回の授業で扱った陰関数の場合は例えば $\frac{dy}{dx}$ の答を x と y の式で表しても構わない (一般に x だけの式では表せない)。

[6] $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{d}{dx}$ の誤用は 1 箇所につき 1 点減点した。