微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 11 月 7 日の試験の解答の要点[1]

1 $[5\times 5+10(6)]$ (1) $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\geq\frac{1}{n}$ $(n\geq 2)$ で $\sum\frac{1}{n}=\infty$ であるから発散する。[2]

(2) $n\geq 6$ のとき $n-3\geq\frac{1}{2}n$ であるから $n^3-3n+3\geq\frac{1}{2}n^3$. よって、$|\frac{n}{n^3-3n+3}|\leq\frac{2}{n^2}$ $(n\geq 6)$ で $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ であるから絶対収束する。

(3) $0<\log(1+x)<x$ $(x>0)$ より $|\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})|\leq\frac{1}{n^2}$ $(n\geq 1)$ で $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ であるから絶対収束する。

(4) $a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$ とおくと、$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(\frac{n!}{(n+1)!})^2\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n\to 0$ $(n\to\infty)$ より絶対収束する。

(5) $0<\sin x<x$ $(0<x<1)$ より $|(-1)^{n-1}\sin^2\frac{1}{n}|\leq\frac{1}{n^2}$ $(n\geq 1)$ で $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ であるから絶対収束する。

(6) $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ とおくと、$a_n=\frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}$ より $\lim a_n=0$ および $a_n\geq a_{n+1}(n\geq 1)$ を得る。よって、交項級数 $\sum(-1)^n a_n$ は収束する。一方、$a_n\geq\frac{1}{3n^{2/3}}$ で $\sum\frac{1}{n^{2/3}}=\infty$ より、$\sum|(-1)^n a_n|$ は発散する。以上より、与えられた級数は条件収束する。

2 $[5]$ まず f_n は 0 に各点収束することに注意する。$|f_n(x)-0|(=f_n(x))$ は $x=\frac{2}{n}$ のとき最大となるので、$n\geq 2$ のとき $M_n:=\sup\{|f_n(x)-0|; x\in[0,1]\}=4e^{-2}n^{p-2}$ となる。よって、$M_n\to 0$ $(n\to 0)$ となるのは $p-2<0$ となるときだから、$p<2$.

3 $[15]$ (1) $\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}=(1-\frac{1}{n})^n\to e^{-1}$ $(n\to\infty)$ より、収束半径は e.

(2) $a_n=\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ とおくと、$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)}\to\frac{1}{27}$ $(n\to\infty)$ より、収束半径は 27.

(3) $a_n=n2^n$ とおくと、$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{2(n+1)}{n}\to 2$ $(n\to\infty)$ より、$t=x^3$ とおいたべき級数 $\sum a_n t^n$ の収束半径は $\frac{1}{2}$. これよりべき級数 $\sum a_n x^{3n}$ は $|x^3|<\frac{1}{2}$ のとき絶対収束、$|x^3|>\frac{1}{2}$ のとき発散するから、収束半径は $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4 $[10]$ 漸化式より $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと、$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$ となる[3]。よって、$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\to\alpha$ より、収束半径 r は $r=\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 次に $\sum\alpha^{n+1}x^n$, $\sum\beta^{n+1}x^n$ の収束半径はそれぞれ $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{|\beta|}$ であるから、$r=\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{|\beta|}$ に注意すると、$|x|<r$ なる x に対して、$\sum\alpha^{n+1}x^n,\sum\beta^{n+1}x^n$ はともに収束する。よって、$\sum a_n x^n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha\sum\alpha^n x^n-\beta\sum\beta^n x^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x})=\frac{1}{1-x-x^2}$ を得る。

5 $[20]$ (1) $|a^n\sin n\theta|\leq a^n$, $\sum a^n<\infty$ となるから Weierstrass の優級数定理により右辺は一様収束する。

(2) (1) より $f(\theta)$ の右辺は各点収束している。また、明らかに $a^n\sin n\theta$ は C^1 級で、$|(a^n\sin n\theta)'|\leq na^n$ で $\sum na^n<\infty$ となるから Weierstrass の優級数定理により $\sum na^n\cos n\theta$ は一様収束する。従って、$f(\theta)$ は微分可能で、$f'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}na^n\cos n\theta$ となる。

(3) (a) $(1-2a\cos\theta+a^2)\sum_{n=1}^N a^n\sin n\theta=\sum_{n=1}^N a^n\sin n\theta-a\sum_{n=1}^N a^n 2\cos\theta\sin n\theta+a^2\sum_{n=1}^N a^n\sin n\theta$ $=\sum_{n=1}^N a^n\sin n\theta-a\sum_{n=1}^N a^n(\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta)+a^2\sum_{n=1}^N a^n\sin n\theta=a\sin\theta-a^{N+1}\sin(N+1)\theta+a^{N+2}\sin N\theta$. よって、$N\to\infty$ とすることで、$(1-2a\cos\theta+a^2)f(\theta)=a\sin\theta$ を得る。

(b) (1) と同様に Weierstrass の優級数定理により級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin n\theta\sin k\theta$ は一様収束し、また各項は連続だから項別積分できる。よって、(与式)$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin k\theta\,d\theta=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\int_0^{2\pi}\sin n\theta\sin k\theta\,d\theta=\pi a^{k-1}$. 最後の等号は $\int_0^{2\pi}\sin n\theta\sin k\theta\,d\theta=\pi$ $(n=k)$, $=0$ $(n\neq k)$ であることを用いた。

---

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。

[2]無限和 $\sum$ の和に関する範囲が自明にわかるときは $\sum_{n=0}^{\infty}$ や $\sum_{n=1}^{\infty}$ を単に $\sum$ と記す。また、$\lim_{n\to\infty}$ を単に lim と記す。以下も同様。

[3]この漸化式は次のように解く。上記の α,β は $x^2=x+1$ の根だから $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ をみたす。よって、漸化式を $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$ と変形できる。これより $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n(a_1-\alpha a_0)$. ($\beta\neq 1$ に注意。) 同様に $a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})$ と変形し、$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n(a_1-\beta a_0)$ を得る。この二つを連立させて解けば、$a_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\{\alpha^n(1-\beta)-\beta^n(1-\alpha)\}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$ がわかる。但し、最後の等号は $\alpha-\beta=\sqrt{5},\alpha+\beta=1$ を用いた。(演習問題を載せておきます。解いてみてください。)

問題 次の漸化式で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(解答 (1) $a_n=\frac{1}{2}\{(-1)^{n+1}-(-3)^{n+1}\}$, (2) $a_n=\frac{3}{4}\{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}\}$)

(1) $a_0=1,\ a_1=-4,\ a_{n+1}=-4a_n-3a_{n-1}$ (2) $a_1=0,\ a_2=1,\ 3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$ (数研出版オリジナル数学 B より)