

- 解答用紙は裏面も使用してください。

名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1. (1) $\text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right), \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $4 \text{Arctan} \frac{1}{5} - \text{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ を示せ。

2. 次の関数を微分せよ。

(1) $x^{\text{Arccos } x}$ (2) $\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$

3. 次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $x^2 e^{3x}$ (2) $\sin^3 x$ (3) $\frac{x}{x^2 + 3x + 2}$ (4) $x^{n-1} \log x$

(ヒント: (4) $(x^{n-1} \log x)^{(n)} = (n-1)!/x$ です。証明せよ。)

4. $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ に対し、以下を示せ。

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

(ヒント: $z = (x^2 - 1)^n$ とおき $(x^2 - 1)z' = 2nxz$ を導き、その両辺を $n+1$ 回微分せよ。)

5. $\text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & (x > 0) \\ -\pi/2 & (x < 0) \end{cases}$ を示せ。(ヒント: 平均値の定理を用いよ。)

6. 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Arctan } x}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)} \right)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$ (4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{\log(x - \frac{\pi}{2})}{\tan x}$

7. 数列 $\{c_n\}$ は、 $c_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) で $\{nc_n\}$ は収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = \alpha$ であるとする。このとき、次で定義される関数 $f(x)$ は $x = 0$ で右側微分可能で、 $f'_+(0) = \alpha$ となることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} c_n & \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots \right) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$