微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト 2 回目　　出題日 2006 年 5 月 30 日

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \alpha > 0$ とする。

(1) ある $\delta_1 > 0$ が存在して、「$0 < |x-a| < \delta_1 \implies f(x) > \dfrac{\alpha}{2}$ 」となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$ を示せ。(ε-δ 論法を用いよ。)

2. 次の極限値を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,\ \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ は既知とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^{1/2} - (2-x)^{1/2}}{(1+2x)^{1/3} - 1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1-0} \frac{x^2+3x+2}{|x+1|}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{x^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-2x+x^2)^{1/x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(2^x+3^x+4^x)^{1/x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)$

3. (1) 中間値定理を述べよ。(証明は書く必要ありません。)

(2) $(0,\infty)$ で方程式 $x\tan x = 1$ の根について次を示せ。ただし、各 $n = 0,1,2,\ldots$ に対し、$[n\pi, n\pi+\pi/2)$ 上で $x\tan x$ や $\tan x$ が狭義単調増加な連続関数であることは既知とする。

(a) 区間 $(n\pi, n\pi+\pi/3)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ に根が 1 つずつある。

(b) $(n\pi, n\pi+\pi/3)$ にある根を $x_n = n\pi + \alpha_n$ とおくと $\{\alpha_n\}$ は次をみたす。

(イ) $\dfrac{\pi}{2} > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > \cdots$　(ロ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

4. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ が $(0,1]$ で一様連続でないことを示せ。

5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2+a_n}$ $(n \geq 1)$ によって定義される数列について以下を解け。

(1) $\dfrac{1}{3} \leq a_n \leq 1$ $(n \geq 1)$ を示し、これを用いて

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{9}{16}|a_n - a_{n-1}| \qquad (n \geq 2)$$

を示せ。

(2) $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し (よって $\{a_n\}$ は収束列)、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。