微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日　2006 年 5 月 9 日

1.　(1)　$\log_2 3$ が無理数であることを示せ。

（ヒント: $\log_2 3$ が有理数、即ち、自然数 p, q により $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表せたとして矛盾を導け。）

(2)　$A = [0, \log_2 3] \cap \mathbf{Q}$ とおくとき、$\max A$ が存在しないことを証明せよ。

2.　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ を ε-n_0 論法で証明せよ。

3.　(1) $\{a_n\}$ が α に収束するとき、$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$ を示せ。

(2)　e の定義 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ から、$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ を導け。

4.　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

(1)　$\{a_n\}$ が有界であることを示せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を示せ。(ε-n_0 論法を用いよ。)

5.　「はさみうち」を利用して次を示せ。

(1)　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$　　（ヒント: $(1+1)^n$ に二項定理を用いよ。）

(2)　$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{1/n} = 3$　　　(注意: $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ $(a > 0)$ は既知としてよい。)

6.　$a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \dfrac{1}{4}({a_n}^2 + 2)$ $(n \geq 1)$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$\{a_n\}$ が有界な単調増加列であることを示せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。