解析学III

杉浦　誠

平成18年7月26日

目次

1　微分方程式の初等解法

1.1　微分方程式の初等解法

変数 t とその関数 $x(t)$ および関数 F に対して

$$F(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0 \tag{1.1}$$

の形の方程式を、$x(t)$ に関する (**常**) **微分方程式**という。導関数の最高階数 n をこの微分方程式の**階数**という。この式をみたす C^n 級関数 $x(t)$ をその**解**という。[1] [2]

特に $x^{(n)}=f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)})$ と表せるとき正規形という。

例えば、A,B を任意の定数として、$x=Ae^t+Be^{2t}$ は 2 階微分方程式 $x''-3x'+2x=0$ の 解である。

また、$y^2=\log|x|+C$ (C は任意の定数) で定められる y は、1 階微分方程式 $2xyy'=1$ の解である。

n 階微分方程式の解で、n 個の任意定数を含むものを**一般解**、任意定数の一部またはすべてに値を代入して得られる解を**特殊解**、一般解でも特殊解でもない解を**特異解**という。

与えられた微分方程式から出発して、四則演算, 微分・積分, 関数の合成および逆関数を作る操作、初等関数への代入、およびそれらの有限回の組み合わせによって一般解が求められるとき、そのような解き方を**初等解法**または**求積法**という。

(I) 変数分離形

$$\frac{dx}{dt}=f(t)g(x)$$

のような方程式を変数分離形という。これは、$g(x)\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{g(x)}\dfrac{dx}{dt}=f(t)$ の両辺を積分して、

$$\int\frac{dx}{g(x)}=\int f(t)\,dt$$

となり、これから一般解を得る。

例題 1.1　　$x'=t(1-x^2)$　を解け。

解: $x\neq\pm1$ のとき、$\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\int t\,dt$ より、

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=\frac{1}{2}t^2+C$$

これから、$\dfrac{1+x}{1-x}=Ae^{\frac{1}{2}t^2}$. ($A=e^{\pm2C}$ とおいた。$A\neq0$ に注意。) よって、$x=\dfrac{Ae^{\frac{1}{2}t^2}-1}{Ae^{\frac{1}{2}t^2}+1}$ を得る。また、$x=1,\ x=-1$ も明らかに解である。(それぞれ $A=\infty,\ A=0$ の場合になっている。)　□

[1]このノートは次の URL からダウンロードできます。 http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/

[2]参考文献： [K] 笠原晧司: 微分方程式の基礎 朝倉書店　[S] 島倉紀夫: 常微分方程式 裳華房 [Y] 谷島賢二: 物理数学入門 東京大学出版会　他

(II) 同次形

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

の形にかける方程式を同次形という。これは、$u = x/t$ とおくと、$x = ut$ より $u't + u = x' = f(u)$, すなわち

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

となり、変数分離形に帰着できる。

例題 1.2 $\quad tx' = x + \sqrt{t^2 + x^2} \quad$ を解け。

解: $t > 0$ とする。$x' = \dfrac{x}{t} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2}$ であるから、$u = x/t$ とおくと、$u + tu' = u + \sqrt{1 + u^2}$. よって、

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dt}{t}, \qquad \text{i.e.,} \quad \log(u + \sqrt{1 + u^2}) = \log t + c.$$

もとの x にもどすと、$x + \sqrt{t^2 + x^2} = kt^2$. ($k = e^c > 0$: 任意常数.) 両辺に $\sqrt{t^2 + x^2} - x$ をかけると、$\sqrt{t^2 + x^2} - x = 1/k$ を得るから、

$$x = \frac{1}{2}\left(kt^2 - \frac{1}{k}\right), \qquad (k > 0\text{: 任意定数}) \tag{1.2}$$

を得る。$t < 0$ のときは $x' = \dfrac{x}{t} - \sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2}$ であるから、同様に (1.2) が解であることがわかる。また、$t = 0$ のとき $x < 0$ であり問題式の両辺ともに 0 となるので、(1.2) が求める解である。 □

問 1.1 次の微分方程式を解け。[3]

(1) $\quad txx' = x^2 - 4$ $\qquad$ *(2)* $\quad \sqrt{1 - t^2}x' = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ *(3)* $\quad tx' \log t = x \log x$

(4) $\quad tx' + (2t^2 - 1)\sin x = 0$ $\qquad$ *(5)* $\quad tx^2x' = t^3 + x^3$ $\qquad$ *(6)* $\quad t\cot\dfrac{x}{t} - x + tx' = 0$

問 1.2 微分方程式 $\quad \dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right) \quad (a\beta - \alpha b \neq 0)$ は $am + bn + c = 0$, $\alpha m + \beta n + \gamma = 0$ なる m, n に対して $t = s + m, x = u + n$ と変数変換すると、

$$\frac{du}{ds} = \frac{du/dt}{ds/dt} = \frac{dx}{dt} = f\left(\frac{as + bu}{\alpha s + \beta u}\right) = f\left(\frac{a + bu/s}{\alpha + \beta u/s}\right)$$

となり同次形である。このことを用いて次の微分方程式を解け。

(1) $\quad (2t + x - 4)x' = t - 2x + 3$ $\qquad$ *(2)* $\quad (t - x - 4)x' = t + x + 2$

問 1.3 *(　　)* 内の変数変換を行い、次の微分方程式を解け。ただし、a は正の定数とする。

(1) $\quad (t + x)^2x' = a^2 \quad (t + x = u)$ $\qquad$ *(2)* $\quad xx' = (2e^t - x)e^t \quad (e^t = s)$

[3] 以下の演習問題 (問 1.1–1.4) は吹田・新保共著 理工系の微分積分学 学術図書 (現 3, 4 年次の 1 年次の微積分の教科書) からとってます。

(III) 1 階線形方程式 (定数変化法)

$$x' = p(t)x + q(t) \tag{1.3}$$

解法: まず $q(t) = 0$ とし、$x' = p(t)x$ を解くと $x = Ce^{\int p(t)\,dt}$ を得る。

ここで、(1.3) を解くために C を t の関数と考え、

$$x = C(t)e^{\int p(t)\,dt} \tag{1.4}$$

とおき、これを (1.3) に代入すると

$$x' = C'(t)e^{\int p(t)\,dt} + C(t)e^{\int p(t)\,dt}p(t) = C'(t)e^{\int p(t)\,dt} + p(t)x$$

即ち、$C'(t) = q(t)e^{-\int p(t)\,dt}$ を得る。よって、両辺を積分し (1.4) に代入することで、(1.3) の一般解が

$$x = e^{\int p(t)\,dt}\left\{C + \int q(t)e^{-\int p(t)\,dt}\,dt\right\} \qquad (C\text{: 任意定数})$$

であることがわかる。 □

例題 1.3 $\displaystyle\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+t} + \cos t$ を解け。

解: $\displaystyle\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1+t}$ を解いて、$x = \dfrac{C}{1+t}$. よって、$x = \dfrac{C(t)}{1+t}$ とおくと、

$$x' = \frac{C'(t)}{1+t} - \frac{C(t)}{(1+t)^2} = \frac{C'(t)}{1+t} - \frac{x}{1+t}.$$

故に、$C'(t) = (1+t)\cos t$ となるから両辺を積分して、$C(t) = (1+t)\sin t + \cos t + C$ となり、

$$x = \sin t + \frac{\cos t}{1+t} + \frac{C}{1+t} \qquad (C\text{: 任意定数})$$

を得る。 □

例 1.1 *(***Bernoulli の方程式***)*

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)x^\alpha \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

$\alpha = 0, 1$ のときは *1* 階線形方程式なので除外してある。

この方程式は $u = x^{1-\alpha}$ とおくと、

$$u' = (1-\alpha)p(t)u + (1-\alpha)q(t)$$

と変形でき、*1* 階線形方程式に帰着できる。

例 1.2 *(***Riccati の方程式***)* $\displaystyle\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$

一般に、*Riccati* の方程式には初等解法はないが、何らかの方法で一つの解 $x_0(t)$ がみつかれば、次のように一般解が求められる。

$x = u + x_0(t)$ として方程式を書き直すと

$$u' + x_0' = p(u + x_0)^2 + q(u + x_0) + r = pu^2 + (2px_0 + q)u + ({px_0}^2 + qx_0 + r)$$

となるが、$x_0(t)$ は解だから上式両辺の最後の項が消え、*Bernoulli* 型方程式 *(*$\alpha = 2$*)* に帰着できることがわかる。

例題 1.4 $\quad x' = x^2 - 3x + 2 \quad$ を解け。

解: $x_0(t) = 1$ は両辺が 0 となるから解である。これより、$x = u + 1$ とおくと

$$u' = (u+1)^2 - 3(u+1) + 2 = u^2 - u.$$

さらに、$z = u^{1-2}$ とおくと z は $z' = z - 1$ を満たす。これは 1 階線形方程式だから定数変化法で解けて $z = 1 + Ce^t$ を得る。よって、求める解は $x = 1$ と

$$x = z^{-1} + 1 = \frac{2 + Ce^t}{1 + Ce^t} \quad (C \text{ は任意定数。}) \qquad \square$$

問 1.4 次の微分方程式を解け。ただし、a, b は定数とする。

(1) $\quad x' - \dfrac{x}{t} = \log t \qquad$ *(2)* $\quad x' + x\cos t = e^{-\sin t} \qquad$ *(3)* $\quad x' = ax + b\sin t$

(4) $\quad x' + x\cos t = \cos t \qquad$ *(5)* $\quad t^2 x' = tx + x^2 \qquad$ *(6)* $\quad x' + \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{x}$

問 1.5 次の微分方程式を解け。*([K] p.13.*[4]*)*

(1) $\quad x' = x^2 - x - 2 \qquad$ *(2)* $\quad x' = -x^2 + \dfrac{x}{t} + t^2$

(IV) 全微分型方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.5}$$

もし C^1-級関数 $\varphi(x,y)$ で

$$\partial\varphi/\partial x = P, \qquad \partial\varphi/\partial y = Q \tag{1.6}$$

なるものが見つかれば、φ の全微分は

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = Pdx + Qdy = 0$$

となり、等高線 $\varphi(x,y) = c$ が解となる。このように、(1.6) を満たす関数 φ が存在するとき、微分方程式 (1.5) は**全微分型** (または完全型) という。

命題 1.1 単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上で関数 P, Q が C^2-級とする。このとき、*(1.6)* を満たす関数 φ が存在するための必要十分条件は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.7}$$

となることである。特に、このとき証明中の *(1.8)* で φ を定義すれば、$\varphi(x,y) = c$ が微分方程式 *(1.5)* の解となる。

[4]解答: (1) $x + 1 = 1/(\frac{1}{3} + Ce^{3t})$, (2) $1/(x - t) = (Ce^{t^2} - 1)/(2t)$. ヒント: (2) $x = t$ が特殊解.

証明: もし (1.6) を満たす関数 φ が存在すれば、(1.7) を満たすことは明らかである。逆に、(1.7) を満たすとするとき、

$$\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy \tag{1.8}$$

とおくと、$\partial\varphi/\partial x=P$ は明らか。一方、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx+Q(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx+Q(x_0,y)\\&=Q(x,y)-Q(x_0,y)+Q(x_0,y)=Q(x,y)\end{aligned}$$

となり証明は完了する。 □

例題 1.5 $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$ を解け。

解: $\partial(2x+y)/\partial y=\partial(x+2y)/\partial x=1$ であるから、命題 1.1 からこれは全微分型であり、

$$\varphi=\int_{x_0}^{x}(2x+y)\,dx+\int_{y_0}^{y}(x_0+2y)\,dy=x^2+xy-x_0^2-x_0y+x_0y+y^2-x_0y_0-y_0$$

定数項は任意定数の項に繰り入れればよいので、解は $x^2+xy+y^2=c$ となる。 □

問 1.6 次の微分方程式を解け。*([K] p.15.[5])*

(1) $(y\sin x-x)dx+(y^2-\cos x)dy=0$

(2) $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx+(-1+y\sqrt{x^2+y^2})dy=0$

$Pdx+Qdy=0$ は全微分型ではないが、ある関数 $\mu(x,y)$ をかけた方程式 $(\mu P)dx+(\mu Q)dy=0$ が全微分型となることがある。このような関数 $\mu(x,y)$ を**積分因子**という。積分因子を求めることは、微分方程式の解を求めることと同値なので、初等解法の範囲内で積分因子を一般的に求めることは不可能であるが、特殊な場合にはそれが可能である。

μ が積分因子であるための条件は命題 1.1 の (1.7) より

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

となることである。ここでは、P,Q が x,y の多項式または有理関数の場合に有効とされる $\mu=x^my^n$ とおいて探す方法を紹介する[6]。

例題 1.6 $ydx+x(1+xy^2)dy=0$ を解け。

解: $\mu=x^my^n$ とおいて μ が積分因子になるように m,n を決める。

$$(x^my^n\cdot y)_y=(n+1)x^my^n,\quad (x^my^n\cdot x(1+xy^2))_x=(m+1)x^my^n+(m+2)x^{m+1}y^{n+2}$$

[5] 解答: (1) $y\cos x+x^2/2-y^3/3=C$, (2) $x-y+(x^2+y^2)^{3/2}/3=c$.

[6] [K] では他に積分因子が x のみの関数の場合、y のみの関数の場合の μ の探し方が述べられている。また、いままで述べた初等解法がすべて積分因子の方法に帰着できることも紹介されている。

これが一致するためには $n+1=m+1,\ m+2=0$、すなわち $m=n=-2$ となればよい。よって、(1.8) により

$$\varphi=\int_{x_0}^{x}x^{-2}y^{-1}\,dx+\int_{y_0}^{y}x_0^{-1}y^{-2}(1+x_0y^2)\,dy=-\frac{1}{xy}+y+\frac{1}{x_0y_0}-y_0.$$

定数項は任意定数の項に繰り入れればよいので、解は $-\dfrac{1}{xy}+y=c$ となる。 □

問 1.7 次の微分方程式を、積分因子をみつけて解け。*([K] p.18.*[7]*)*

(1) $\quad ydx+2x(1+x^2y^3)dy=0 \qquad$ *(2)* $\quad (y^2+xy)dx-x^2dy=0$

(V) Clairaut 型方程式 (非正規形の例として)

$$x=t\frac{dx}{dt}+f\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{1.9}$$

ここで、関数 $f(s)$ は C^2-級で $f''(s)\neq 0$ をみたすとする。これは次のようにして解ける。

左辺を右辺へ移項して t で微分すると $x'+tx''+f'(x')x''-x'=(t+f'(x'))x''=0$ となり、

$$x''=0, \qquad t+f'(x')=0$$

と分離される。第 1 式からは、任意の直線の方程式 $x=c_1t+c_2$ が得られるが、もとの式に代入すると $c_2=f(c_1)$ でなければならないため、したがって、第 1 式をみたす解は

$$x=ct+f(c) \tag{1.10}$$

である。これを **1 径数解**という。第 2 式は $f''(s)\neq 0$ より f' は逆関数を持つのでそれを $\psi(t)$ とし、再び方程式に代入すると、

$$x=t\psi(t)+f(\psi(t)) \tag{1.11}$$

となり、$x(t)$ として一つの関数が得られる。この $x(t)$ が解であることは $x'(t)=\psi(t)$ に注意すればよい。

ここで、各 c に対し (1.10) は (1.11) で定まる曲線の接線、即ち、(1.11) は直線群 (1.10) の**放絡線**となる[8]。この放絡線が方程式 (1.9) の**特異解**となっている。

例題 1.7 $\qquad x=tx'-e^{x'} \quad$ を解け。

解: 1 径数解は $x=ct-e^c$. その放絡線として、c で微分した $0=t-e^c$ ともとの式から、$x=t\log t-t.$ □

注意 1.1 *Clairaut* 型方程式の解は *1* 径数解と特異解だけではなく、それらを “つないだ” 関数も解である。つまり、一部が *1* 径数解で一部が特異解であるような曲線を考えればよい。したがってこのような場合、一般解というものはない。これは、特異解上の各点で解の一意性が成立しなくなっているためである。

---

[7] 解答: (1) $(2/y)+1/(2x^2y^4)=c$, (2) $y=x/(c-\log|x|)$.

[8] 放絡線の定義は、吹田・新保共著 理工系の微分積分学 学術図書 p.180 などを参照せよ。

問 1.8 次の微分方程式を解け。*([K] p.24.*[9]*)*

(1) $x = tx' + x'^2$ (2) $x = tx' - \log x'$

1.2 万有引力の法則から Kepler 則の導出 (お話)

この節では、Newton の万有引力の法則から Kepler の法則を導く。すなわち、太陽は一つの惑星 (火星としよう) の運動という二体問題を考える。ただし、簡単のため太陽、火星ともに大きさのない点と考え、太陽は火星に比べ十分重いため太陽は 1 点 (原点とする) に固定されているものと考える[10]。まず、Kepler の法則と万有引力の法則を復習しておこう。

(Kepler の法則)

I. 惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描く。

II. 面積測度は一定である。

III. 惑星が太陽を回る楕円軌道の周期の自乗は楕円の長径の三乗に比例する。

(万有引力の法則)

惑星が太陽から受ける引力はその質量に比例し、太陽からの距離の自乗に反比例する。すなわち、太陽の位置を原点 $O = {}^t(0,0,0)$ (不変) とし、時刻 t における火星の位置を $\boldsymbol{x}(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ で表すとき[11]、

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{k}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x} \tag{1.12}$$

となる。ただし、$\dot{x}$ は x の時間変数 t に関する微分を表す。例えば $\ddot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}$ である。また、$k = GM$ で G は万有引力定数、M は太陽の質量である。

時刻 0 での火星の位置を $\boldsymbol{x}(0)$, 速度を $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ とする。ただし、$\boldsymbol{x}(0) \neq O$ である。

<u>以下、$\boldsymbol{x}(0)$ と $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ は一次独立とする</u>: $\boldsymbol{x}(0), \dot{\boldsymbol{x}}(0)$ に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{e} = {}^t(\sin\theta_2\cos\theta_1, \sin\theta_2\sin\theta_1, \cos\theta_2)$ とする。このとき、$R = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$R\boldsymbol{e} = {}^t(0,0,1)$ より、$R\boldsymbol{x}(0) = {}^t(*,*,0)$, $R\dot{\boldsymbol{x}}(0) = {}^t(*,*,0)$ となる。実際、$R \in SO(3)$ より ${}^tR = R^{-1}$ であるから、

$$R\boldsymbol{x}(0) \cdot {}^t(0,0,1) = \boldsymbol{x}(0) \cdot {}^tR^t(0,0,1) = \boldsymbol{x}(0) \cdot \boldsymbol{e} = 0. \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(0) \text{ についても同様。}$$

[9]解答: (1) $x = ct + c^2, x = -t^2/4$, (2) $x = ct - \log c, x = 1 + \log t$).

[10]本来はこの段階まで問題を簡略化できることを吟味しなければならないが、ここでは略す。

[11]注意: ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ は (x_1, x_2, x_3) の転置を意味する。すなわち縦ベクトルで考える。

すなわち、$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = R\boldsymbol{x}$ として、方程式 (1.12) は次のように書き換えることができる:

$$\ddot{y}_i = -\frac{k}{|\boldsymbol{y}|^3} y_i, \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \boldsymbol{y}(0) = {}^t(\xi_1, \xi_2, 0),\ \dot{\boldsymbol{y}}(0) = {}^t(\eta_1, \eta_2, 0) \tag{1.13}$$

ここで、$y_3(t) \equiv 0$ は (1.13) を満たすので、次章の初期値問題の一意性を用いると、あらかじめ $y_3(t) \equiv 0$ としてよいことがわかる。まず、$\dfrac{d}{dt}\{\dfrac{1}{2}(\dot{y_1}^2 + \dot{y_2}^2) - \dfrac{k}{\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}}\} = 0$ であるから、ある定数 E が存在して、

$$E = \frac{1}{2}(\dot{y_1}^2 + \dot{y_2}^2) - \frac{k}{\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}} \tag{1.14}$$

となる。これはエネルギー保存則に相当する。右辺の第 1 項が運動エネルギー、第 2 項は位置エネルギーである。

さて、方程式 (1.13) を解くために極座標を導入し $y_1 = r\cos\varphi, y_2 = r\sin\varphi$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} &= \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \ddot{y_1} \\ \ddot{y_2} \end{pmatrix} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるから、方程式 (1.13) は

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2} \tag{1.15}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \tag{1.16}$$

となる。(1.16) より $\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$ となるから、

$$r^2\dot{\varphi} \equiv c \qquad (c \neq 0) \tag{1.17}$$

となる。よって、Kepler の法則 II が成立する。(これは角運動量保存則である。)

次に、$r^2\dot{\varphi} = c$ を (1.15) に代入すると、$\ddot{r} = \dfrac{c^2}{r^3} - \dfrac{k}{r^2}$ となるから、(1.14) と同様にある定数 E が存在して

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{k}{r} \tag{1.18}$$

となる (エネルギー保存則)。これは求積法で解ける。(実際はこれではどんな運動かわからないので推論を続ける。)

Kepler の法則 I を導くために $\rho = 1/r$ とする。ただし、 ρ は φ の関数と考えるものとする。(1.17) に注意すると、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -c\frac{d\rho}{d\varphi}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -c\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -c^2\rho^2\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}.$$

これを (1.15) に代入して、$\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\rho=\dfrac{k}{c^2}$ を得る。これを解いて[12]、

$$\rho(\varphi)=A\cos\varphi+B\sin\varphi+\frac{k}{c^2}=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\varphi-\varphi_0)+\frac{k}{c^2}$$

となる。ただし、$A=\frac{1}{r(0)}-\frac{k^2}{c^2}$, $B=-\frac{\dot r(0)}{c}$ である。従って、(r,φ) は極方程式

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)} \tag{1.19}$$

を満たす。ただし、$p=c^2/k$, $e=\frac{1}{k}\sqrt{(r(0)\dot\varphi(0)-k^2)^2+\dot r(0)^2}$ (e は離心率) である。よって、$0<e<1$ のとき、(1.15) は原点を１つの焦点とする楕円となる。また、$e=1$ のとき、$e>1$ はそれぞれ原点を焦点とする放物線、双曲線となる (Kepler 則 I)。

Kepler の法則 III のためにその周期を T とおき、また、(1.19) は直交座標系では

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a=\frac{p}{1-e^2},\ b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{1.20}$$

と表せることに注意する。(1.17) に注意して、この楕円の面積を考えることにより

$$\frac{1}{2}cT=\int_0^T\frac{1}{2}r^2\dot\varphi\,dt=\pi ab,$$

即ち、$T=2\pi ab/c$ を得る。従って、(1.20) に注意すると

$$T^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{c^2}=\frac{4\pi^2 p}{c^2}a^3$$

となるので、周期 T の自乗は楕円の長径 a の三乗に比例する。　□

問 1.9 $0<e<1$ の場合に極方程式 *(1.19)* から、直交座標に関する方程式 *(1.20)* を導け。さらに、$e=1$ のとき、$e>1$ はそれぞれ原点を焦点とする放物線、双曲線となることを、その直交座標に関する方程式 *(cf. (1.20))* を導くことにより証明せよ。

問 1.10 $\boldsymbol{x}(0)$ と $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ は一次従属、即ち、単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ が存在して

$$\boldsymbol{x}(0)=r(0)\boldsymbol{e},\quad \dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot r(0)\boldsymbol{e},\qquad (r(0)>0)$$

とできる。よって、適当な $R\in SO(3)$ をとれば、$\boldsymbol{y}(t)=R\boldsymbol{x}(0)$ とおくことで、*(1.13)* を $\xi_1>0,\ \xi_2=\eta_2=0$ として導かれる。特に、あらかじめ $y_2(t)\equiv 0,\ y_3(t)\equiv 0$ としてよいことがわかる。これより、*(1.19)* の証明と同様にエネルギー保存則 $E=\dfrac{1}{2}\dot y_1{}^2-\dfrac{k}{y_1}$ を得る。

この状況の下、$E=0$ かつ $\dot y_1(0)<0$ の場合にこの方程式を解くことで、ある t_c が存在して $y_1(t_c)=0$ となることを示せ。

実は、$\dot y_1(0)>0$ かつ $E<0$ の場合のときは $t\mapsto y_1(t)$ は単調増加 *(*即ち太陽から遠ざかり*)*、また $\dot y_1(0)\le 0$ であれば有限時間内に太陽に衝突することが比較的容易に示せる。

[12] 詳しくは第 3 章 線形微分方程式で論じる。

2　基礎定理

2.1　初期値問題の解の存在と一意性

この節では 1 階連立微分方程式

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad k = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

に対する初期値問題

$$x_k(a) = b_k \qquad k = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

の解の存在と一意性を考える。以下、記号を簡単にするため $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, $b = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$, $f = {}^t(f_1, \ldots, f_n)$ と書き、初期値問題 (2.1), (2.2) を単に

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad x(a) = b \tag{2.3}$$

と書くこととする。

注意 2.1 正規形の n 階微分方程式

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

も *(2.1)* のように表せる。実際、$x_k = x^{(k-1)}$, $k = 1, \ldots, n$ とし

$$f_k(t, x_1, \ldots, x_n) = x_k, \quad k = 1, \ldots, n-1; \qquad f_n(t, x_1, \ldots, x_n) = f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

とすればよい。

定義 2.1 *(***Lipschitz 連続***)* 領域 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の *(*$\mathbb{R}^n$ 値の*)* 連続関数 $f(t, x)$ が x について *Lipschitz* 連続であるとは、ある定数 $L > 0$ が存在して任意の $(t, x), (t, y) \in \Omega$ に対して

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \tag{2.4}$$

が成り立つときにいう。

問 2.1 $f(x) = |x|^\alpha$ は *(1)* $\alpha = 1$ のとき $\mathbb{R}$ 上で *Lipschitz* 連続である。*(2)* $\alpha > 1$ のとき任意の有界区間上で *Lipschitz* 連続であるが、$\mathbb{R}$ 上では *Lipschitz* 連続ではない。*(3)* $0 < \alpha < 1$ であれば 0 を含む区間で *Lipschitz* 連続ではない。これを示せ。

例 2.1 $f(t, x)$ が x 方向に凸な有界閉領域 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ において連続かつ x について区分的に C^1 級であれば、$f(t, x)$ は x について D 上 *Lipschitz* 連続である。

補題 2.1 $f = {}^t(f_1, \ldots, f_n)$ を領域 I 上の $\mathbb{R}^n$ 値可積分な関数とすると、

$$\left| \int_I f \, dt \right| \leq \sqrt{n} \int_I |f| \, dt$$

となる。ただし、$\int_I f \, dt = {}^t(\int_I f_1 \, dt, \ldots, \int_I f_n \, dt)$ とする。

証明: $\left|\int_I f\,dt\right|^2 = \sum_k \Big(\int_I f_k\,dt\Big)^2 \le n \max_k \Big(\int_I |f_k|\,dt\Big)^2 \le n\Big(\int_I |f|\,dt\Big)^2$ □

例 2.1 の証明: D は凸だから、任意の $(t,x),(t,y)\in D$ と $0\le\theta\le 1$ に対して $(t,\theta x+(1-\theta)y)\in D$. よって、$L := \max_{(t,x)\in D}\Big\{\sum_{k=1}^n \Big|\frac{\partial f}{\partial x_k}(t,x)\Big|^2\Big\}^{1/2}$ とおくと、

$$\begin{aligned}|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(t,\theta x+(1-\theta)y)\,d\theta\right| \\ &\le \sqrt{n}\int_0^1 \sum_{k=1}^n \Big|\frac{\partial f}{\partial x_k}(t,\theta x+(1-\theta)y)\Big| |x_k-y_k|\,d\theta \le \sqrt{n}L|x-y| \quad \square\end{aligned}$$

以下、初期値問題 (2.3) を考えるために、$f(t,x)$ は領域 $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上で定義され、$(a,b)\in D$ であり、

$$R = \{\,(t,x)\,;\,|t-a|\le r, |x-b|\le\rho\,\}\subset D \tag{2.5}$$

なる $r,\rho>0$ を選び、$M=\sqrt{n}\max_{(t,x)\in R}|f(t,x)|$, $\alpha=\min\{r,\frac{\rho}{M}\}$ とおく。

定理 2.2 *$f(t,x)$ が R 上 Lipschitz 連続ならば、初期値問題 (2.3) は区間 $I=[a-\alpha,a+\alpha]$ 上で定義された解を一意的に持つ。以下、この解を $x(t,a,b)$ と書くこととする。*

証明: このためには、積分方程式

$$x(t) = b+\int_a^t f(s,x(s))\,ds \tag{2.6}$$

がただひとつの解をもつことを示せばよい。

存在: 関数列 $\{x_m(t)\}$ を次で定める:

$$x_0(t)\equiv b, \qquad x_m(t) = b+\int_a^t f(s,x_{m-1}(s))\,ds \tag{2.7}$$

このとき、α のとり方から、$|x_m(t)-b|\le M|t-a|\le\alpha M\le\rho$ となり、$(t,x_m(t))\in R$ であるから (2.7) は定義できる。次に、

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)| \le \frac{(\sqrt{n}L|t-a|)^m}{m!}\rho \tag{2.8}$$

を帰納法で示す。$m=0$ のときはすでに示した。$m\ge 1$ のとき、

$$\begin{aligned}|x_{m+1}(t)-x_m(t)| &\le \left|\int_a^t \{f(s,x_m(s))-f(s,x_{m-1}(s))\}\,ds\right| \le \sqrt{n}L\left|\int_a^t |x_m(s)-x_{m-1}(s)|\,ds\right| \\ &\le \frac{(\sqrt{n}L)^m}{(m-1)!}\rho\left|\int_a^t |s-a|^{m-1}\,ds\right| \le \frac{(\sqrt{n}L|t-a|)^m}{m!}\rho\end{aligned}$$

を得る。よって、$\sum_{m=0}^\infty \frac{(\sqrt{n}L\alpha)^m}{m!}\le e^{\sqrt{n}L\alpha}<\infty$ であるから、$m_1>m_2$ のとき、

$$\max_{t\in[a-\alpha,a+\alpha]}|x_{m_1}(t)-x_{m_2}(t)| \le \sum_{k=m_2}^{m_1-1}\max_{t\in[a-\alpha,a+\alpha]}|x_{k+1}(t)-x_k(t)| \le \sum_{k=m_2}^{m_1-1}\frac{(\sqrt{n}L\alpha)^k}{k!}\rho$$

となり、$\{x_m(t)\}$ は一様収束の位相での Cauchy 列である。したがって、連続関数の空間はこの位相に関して完備だから、$[a-\alpha, a+\alpha]$ 上のある連続関数 $x(t)$ に一様収束する。特に、(2.7) で $m \to \infty$ とすることで、この $x(t)$ が (2.6) を満たすことも従う。(このように (2.7) で $\{x_m\}$ を構成する方法を**逐次近似法**という。)

一意性: $x(t), y(t)$ を (2.6) の解とする。このとき、Lipschitz 連続性より

$$|x(t)-y(t)| \le \left| \int_a^t \{f(s,x(s)) - f(s,y(s))\}\, ds \right| \le \sqrt{n}L \left| \int_a^t |x(s)-y(s)|\, ds \right|.$$

よって、次の Gronwall の補題 ($\varphi \equiv 0$ の場合) により $|x(t)-y(t)| \equiv 0$ を得る。 □

命題 2.3 *(Gronwall の補題)* $\varphi(t), \psi(t), w(t)$ は区間 $[a,b]$ で連続で、$\psi(t) \ge 0$ とする。このとき、

$$w(t) \le \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)w(s)\, ds \qquad (a \le t \le b) \tag{2.9}$$

ならば、

$$w(t) \le \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\varphi(s) e^{\int_s^t \psi(u)\, du}\, ds \qquad (a \le t \le b) \tag{2.10}$$

が成立する。

証明: $v(t) = \int_a^t \psi(s)w(s)\, ds$ とおくと、$v'(s) = \psi(s)w(s)$ であるから、(2.9) の両辺に $\psi(t) \ge 0$ をかけて

$$v'(t) \le \psi(t)\varphi(t) + \psi(t)v(t).$$

この右辺の第 2 項を左辺に移項し、両辺に $e^{-\int_a^t \psi(u)du}$ をかけると

$$\frac{d}{dt}(v(t)e^{-\int_a^t \psi(u)du}) \le \psi(t)\varphi(t)e^{-\int_a^t \psi(u)du}.$$

両辺を a から t まで積分し、$v(a)=0$ を考慮すると、

$$v(t)e^{-\int_a^t \psi(u)du} \le \int_a^t \psi(s)\varphi(s)e^{-\int_a^s \psi(u)du}\, ds.$$

これから、$v(t) \le \displaystyle\int_a^t \psi(s)\varphi(s)e^{\int_s^t \psi(u)du}\, ds$ となり、これを (2.9) の右辺第 2 項と置き換えることにより (2.10) を得る。 □

系 2.4 定理 *2.2* において $f(t,x)$ が (t,x) について C^r 級であれば、その解 $x(t)$ は C^{r+1} 級である。

証明: 解 $x(t)$ は (2.6) を満たすから明らか。 □

問 2.2 初期値問題 $\dfrac{dx}{dt} = cx,\ x(0)=1$ について、逐次近似法 *(2.7)* により $x_m(t)$ を定義するとき、具体的に $x_m(t)$ を書き下し、それが $x(t)=e^{ct}$ に収束することを確かめよ。

問 2.3 次の初期値問題を逐次近似法で解け。[13]

(1) $x' = 2x - 1, \quad x(0) = 1$ *(2)* $x' = tx, \quad x(0) = 3$

(3) $x_1' = x_1 + x_2,\ x_2' = x_1 - x_2, \quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = \sqrt{2} - 1$

問 2.4 $x'' + x = 0.\ x(0) = 0, x'(0) = 1$ を連立微分方程式 $x' = y,\ y' = -x,\ x(0) = 0, y(0) = 1$ に書き直し逐次近似し、それが $\sin t, \cos t$ に収束することを確かめよ。

ヒント: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^m}{m!}A^m\right)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$ を示す。

注意 2.2 *(1)* 定理 *2.2* で解の一意性においては *Lipschitz* 連続性ははずせない。実際、任意の $c \geq 0$ に対し

$$x(t) = (t-c)^2,\ t \geq c; \qquad x(t) = 0,\ t < c$$

は $\dfrac{dx}{dt} = 2|x|^{1/2},\ x(0) = 0$ の解となる。一方、問 *2.1* で見たように、$|x|^{1/2}$ は $x = 0$ の近傍では *Lipschitz* 連続ではない。
(2) 定理 *2.2* で解の存在においては $f(t,x)$ は連続であればよい。実際、次が成り立つ。

定理 2.5 $f(t,x)$ が R 上連続であれば、初期値問題 *(2.3)* は区間 $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ 上で定義された解を持つ。ただし、R, α 等は *(2.5)* とその下で定義したそれである。

この定理の証明のためには次の Ascoli-Arzelà の定理を必要とする。

定理 2.6 *(***Ascoli-Arzelà***)* *compact* 集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上の連続関数の族 $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次の *(I), (II)* を満たせば、$\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が一様位相で点列 *compact,* 即ち、一様収束の意味で収束部分列をもつ。*(*実は、同値である。*)*

(I) $\displaystyle\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{x\in K}|f_\lambda(x)| < \infty$ *(*一様有界*)*

(II) $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{x,y\in K:|x-y|<\delta}|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| = 0$ *(*同程度連続*)*

証明: $\{x_m\} \subset K$ を可算稠密集合とする。(例えば、$K \cap \mathbb{Q}^n$ をとり整列させればよい。) (I) より、各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $\{f_\lambda(x_m)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有界だから Bolzano-Weierstrass の定理より収束部分列を含む。これを対角線論法と合わせて用いることで $\{\lambda_k\} \subset \Lambda$ がとれて、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して $\{f_{\lambda_k}(x_m)\}_{k=1}^\infty$ は収束列とできる。この $\{f_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$ が一様位相で Cauchy 列となることを示すため、$\varepsilon > 0$ を任意にとっておく。(II) より、ある $\delta > 0$ がとれて

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{x,y\in K:|x-y|<\delta}|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。一方、K は compact だからある $M \in \mathbb{N}$ で $K \subset \cup_{m=1}^M B_\delta(x_m)$ とできる。ただし、$B_\delta(x) = \{\, y\,;\ |y - x| < \delta\}$ とした。更に、この $x_1, \ldots, x_M$ に対して k_0 がとれて、

[13] [KM] 加藤義夫, 三宅正武共著: 微分方程式演習 サイエンス社, p.49, p.56 より。解: (1) $(1+e^{2t})/2$, (2) $3e^{t^2/2}$, (3) $x_1 = e^{\sqrt{2}t}$, $x_2 = (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}$

$$k, l \geq k_0 \text{ ならば } \forall m = 1, \ldots, M \text{ に対して} \quad |f_{\lambda_k}(x_m) - f_{\lambda_l}(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。以上より、$\forall x \in K$ に対し $|x - x_m| < \delta$ なる $m \in \{1, \cdots, M\}$ を選べば、

$$|f_{\lambda_k}(x) - f_{\lambda_l}(x)| \leq |f_{\lambda_k}(x) - f_{\lambda_k}(x_m)| + |f_{\lambda_k}(x_m) - f_{\lambda_l}(x_m)| + |f_{\lambda_l}(x_m) - f_{\lambda_l}(x)| < \varepsilon$$

となり証明は完了した。 □

定理 2.5 の証明: 定理 2.2 の証明同様 (2.6) をみたす関数 $x(t)$ の存在を示せばよい。このため、$x_m(t)$ を次のように構成する: $t_k = a + \frac{k}{m}\alpha$, $k = -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m$ とし

$$\begin{aligned}
x_m(a) &= b \\
x_m(t) &= x_m(t_k) + (t - t_k) f(t_k, x_m(t_k)), \qquad t_k \leq t \leq t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, m-1 \\
x_m(t) &= x_m(t_k) + (t - t_k) f(t_k, x_m(t_k)), \qquad t_{k-1} \leq t \leq t_k,\ k = 0, -1, \ldots, -m+1.
\end{aligned}$$

このとき、$s, t \in [a - \alpha, a + \alpha]$ であれば、

$$|x_m(t) - x_m(s)| \leq M|t - s|$$

となるから同程度連続性が、特に $s = a$ ととれば一様有界性が従うから、Ascoli-Arzelà の定理により $\{x_m(t)\}$ は点列 compact. よって、一様収束する部分列 $\{x_{m'}(t)\}$ を選ぶことができる。この極限が (2.6) をみたすことは、

$$(t - t_k) f(t_k, x_m(t_k)) = \int_{t_k}^{t} f(t_k, x_m(t_k))\, ds$$

であることに注意すればすぐに従う。(このように構成した $\{x_m\}$ は折れ線になっているため、**折れ線近似**と呼ばれることがある。) □

問 2.5 初期値問題 $\dfrac{dx}{dt} = cx,\ x(0) = 1$ について、折れ線近似により $x_m(t)$ を定義するとき、具体的に $x_m(t)$ を書き下し、それが $x(t) = e^{ct}$ に収束することを確かめよ。ただし、$\alpha = 1$ として計算せよ。

問 2.6 次の初期値問題を折れ線近似法で解け。[14]

(1) $x' = 3x + 2, \quad x(0) = 0$ *(2)* $x' = -x - 2, \quad x(0) = 1$

2.2 解の延長と大域解

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を領域 (開集合とする) とし、$f \in C(D; \mathbb{R}^n)$ とする。

定義 2.2 $\forall (t, x) \in D$ に対し (t, x) の近傍 U が存在して f が U 上で x について *Lipschitz* 連続であるとき、f は**局所 Lipschitz 連続**であるという。

以下、$\mathrm{Lip}_x(D; \mathbb{R}^n)$ で D 上の局所 Lipschitz 連続関数全体を表す。
例 2.1 より $C^1(D; \mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Lip}_x(D; \mathbb{R}^n)$ となることに注意する。

[14][KM] p.62. 解: (1) $2(e^{3t} - 1)/3$, (2) $3e^{-t} - 2$

$f \in \mathrm{Lip}_x(D;\mathbb{R}^n)$, $(a_0, b_0) \in D$ とし、初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad x(a_0) = b_0 \tag{2.11}$$

を考える。このとき、(a_0, b_0) の近傍で f は Lipschitz 連続であるから、定理 2.2 により $\alpha_0 > 0$ がとれて $I_0 := [a_0 - \alpha_0, a_0 + \alpha_0]$ 上で定義された一意解 $x(t; a_0, b_0)$ を持つ。このとき、$a_1 = a_0 + \alpha_0, b_1 = x(a_1; a_0, b_0)$ とすると、$(a_1, b_1) \in D$ であるから $x(a_1) = b_1$ として初期値問題 (2.11) を考えると、再び定理 2.2 により $\alpha_1 > 0$ がとれて $I_1 := [a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1]$ 上で定義された一意解 $x(t; a_1, b_1)$ を持つ。今、解は一意的だから

$$x(t; a_0, b_0) = x(t; a_1, b_1) \qquad t \in I_0 \cap I_1$$

となる。これより、改めて $x(t) = x(t; a_0, b_0)$ $(t \in I_0)$; $x(t) = x(t; a_1, b_1)$ $(t \in I_1)$ と定めれば、$x(t)$ は初期値問題 (2.11) の解となる。以下、これを左右に繰り返すことで最大延長解が得られることを証明する。

補題 2.7 *$f \in \mathrm{Lip}_x(D;\mathbb{R}^n)$, $(a_0, b_0) \in D$ とし、初期値問題 (2.11) の区間 $[a_0, a_1)$ 上の解 $x(t)$ に対して、$t_m \uparrow a_1$ があって、$b_1 := \lim_{m\to\infty} x(t_m)$ が存在し、かつ $(a_1, b_1) \in D$ とする。このとき、連続的極限として $(t, x(t)) \to (a_1, b_1)$ $(t \uparrow a_1)$ が成り立ち、特に上記の方法で解 $x(t)$ は a_1 よりさらに右に延長できる。左への延長についても同様のことが成立する。*

証明: $(a_1, b_1) \in D$ より $\varepsilon > 0$ が存在して $R = \{(t,x); |t - a_1| \le \varepsilon, |x - b_1| \le \varepsilon\} \subset D$ とできる。$M_\varepsilon := \sqrt{n}\sup_R |f(t,x)|$ とする。$t_m \uparrow a_1$ かつ $x(t_m) \to b_1$ であるから、ある N が存在して

$$m \ge N \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < a_1 - t_m < \frac{\varepsilon}{2M_\varepsilon}, \quad |x(t_m) - b_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる。このとき、$t_N \le t < a_1$ のとき $x(t)$ は (2.11) の解であるから

$$|x(t) - x(t_N)| \le \int_{t_N}^{t} |f(s, x(s))|\, ds \le M_\varepsilon (t - t_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって、$|x(t) - b_1| \le |x(t) - x(t_N)| + |x(t_N) - b_1| < \varepsilon.$ □

定理 2.8 *$f \in \mathrm{Lip}_x(D;\mathbb{R}^n)$ のとき、初期値問題 (2.11) の最大延長解およびその定義域 (α, ω) は一意的に存在する。特に $t \downarrow \alpha$ or $t \uparrow \omega$ のとき $(t, x(t)) \to \partial D$、即ち、$\forall \Delta \Subset D$ に対して $[\alpha_1, \omega_1] \subset (\alpha, \omega)$ が存在して、$t \in (\alpha, \omega) \backslash [\alpha_1, \omega_1]$ ならば $(t, x(t)) \in D \backslash \Delta$ となる。*

証明: (前半) 2 つの異なる右最大延長解 $x(t), y(t)$ が存在し、その定義域を $[a, \omega_1), [a, \omega_2)$ $(\omega_1 < \omega_2)$ とする。$t_* = \inf\{t > a | x(t) \ne y(t)\}$ とおくと、$t_* \le \omega_1$. このとき、$\varepsilon > 0$ がとれて

$$x(t_*) = y(t_*) \ \text{ かつ } \ x(t) \ne y(t) \ (t_* < t < t_* + \varepsilon)$$

これは、$(t_*, x(t_*)) \in D$ を初期値とした初期値問題 (2.11) の解の一意性に矛盾する。よって、右最大延長解は一意的に存在する。左も同様にわかる。

(後半) $\omega = \infty$ のときは明らか。$\omega < \infty$ のとき $\{t_m\}$ が存在して $t_m \to \omega$ かつ $(t_m, x(t_m)) \in \Delta$ と仮定する。このとき、Δ は compact だから必要ならば部分列をとることにより $(t_m, x(t_m)) \to$

$(\omega, b_*) \in \Delta$ なる b_* が存在する。しかし、このとき補題 2.7 より右延長可能となり、これは最大性に矛盾する。 $\square$

$I \subset \mathbb{R}, D = I \times \mathbb{R}^n$ に対して、初期値問題 (2.11) の I 全体を定義域とする解を大域解と言う。

定理 2.9 *$D = I \times \mathbb{R}^n$, $I = (t_0, t_1)$ $(-\infty \le t_0 < a < t_1 \le \infty)$ で $f \in \mathrm{Lip}_x(D; \mathbb{R}^n)$ のとき、初期値問題 (2.11) の解 $x(t)$ に対して、それが定義されている限り*

$$|f(t, x(t))| \le A|x(t)| + B \quad A, B \text{ は } t \text{ および } x(t) \text{ によらない定数} \tag{2.12}$$

となれば $x(t)$ は区間 I 全体で定義できる。

証明: 右への延長を考える。(左も同様。) $x(t)$ が $\omega < t_1$ なる $[a, \omega)$ まで延長されたとする。$x(t)$ は $x(t) = b + \int_a^t f(s, x(s))\,ds$ を満たすから、

$$|x(t)| \le |b| + \sqrt{n}\int_a^t |f(s, x(s))|\,ds \le |b| + \sqrt{n}\int_a^t (A|x(s)| + B)|\,ds.$$

$A = 0$ の場合 $|x(t)| \le |b| + B(t-a)$ より、$\overline{\lim}_{t\to\omega} |x(t)| < \infty$ となるから、補題 2.7 によりさらに右に延長できる。$A > 0$ のときは

$$0 \le |x(t)| + \frac{A}{B} \le |b| + \frac{B}{A} + \sqrt{n}A\int_a^t (|x(s)| + \frac{B}{A})\,ds$$

と変形し Gronwall の補題 (命題 2.3) を用いると

$$|x(t)| + \frac{B}{A} \le (|b| + \frac{B}{A})e^{\sqrt{n}A|t-a|}.$$

よって、この場合も $\overline{\lim}_{t\to\omega} |x(t)| < \infty$ となるから、再び補題 2.7 によりさらに右に延長できる。従って、$\omega = t_1$ を得る。 $\square$

注意 2.3 一般に最大延長解は I 全体で定義されるとは限らない。例えば、$p > 1$ とすると、$\dfrac{dx}{dt} = x^p$, $x(0) = 1$ の解は

$$x(t) = \{1 - t/(p-1)\}^{-1/(p-1)}$$

となり条件 *(2.12)* を満たさないを満たさない。この場合、$t \to p-1$ のとき $x(t) \uparrow \infty$ となる。*(*有限時間爆発をする。*)*

3 線形微分方程式

3.1 重ね合わせの原理

この章では 1 階線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), \qquad t \in I := (t_0, t_1) \tag{3.1}$$

を考える。$(-\infty \le t_0 < t_1 \le \infty)$ ただし、$A(t)$ は連続関数を成分とする n 次正方行列、$b(t)$ は $\mathbb{R}^n$ 値連続関数とする。$b \equiv 0$ のとき**同次系**, そうでないとき**非同次系**という。

以下、n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対してそのノルム $\|A\|$ を

$$\|A\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2} \tag{3.2}$$

で定義する。

補題 3.1 $|Ax| \le \|A\||x|$.

証明: Schwarz の不等式を用いると、

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\Big) = \|A\|^2|x|^2. \qquad \square$$

定理 3.2 *(**線形方程式の解の存在と一意性**)* $\forall(a,b)\in I\times\mathbb{R}^n$ に対し初期条件 $x(a)=b$ を満たす線形方程式 *(3.1)* の大域解 $x(t;a,b)$ が一意的に存在する。

証明: $\forall[\tau_0,\tau_1]\subset(t_0,t_1)$ に対して、$c_1 = \max_{\tau_0\le t\le\tau_1}\|A(t)\|$, $c_2 = \max_{\tau_0\le t\le\tau_1}|b(t)|$ とすると、補題 3.1 より $|A(t)x+b(t)| \le c_1|x|+c_2$ を満たす。よって、主張は定理 2.9 から従う。
$\square$

3.1.1 同次系の場合

この節では (3.1) で特に同次系の場合、即ち、線形方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x(a)=\xi \tag{3.3}$$

の一意解を $x(t;a,\xi)$ とおき、その解全体

$$V = \{\, x(\cdot;a,\xi)\,;\,\xi\in\mathbb{R}^n \,\} \tag{3.4}$$

の構造を考える。

定理 3.3 *(**重ね合わせの原理**)* *(1)* V は線形空間で、$\dim V = n$ となる。
(2) $v_1,\dots,v_n\in V$ とする。このとき、$v_1,\dots,v_n$ が V の基底であることと、ある $t\in I$ *(*従って任意の $t\in I$*)* に対して $v_1(t),\dots,v_n(t)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることとは同値である。

証明: (1) 初期値問題の一意性により、$\forall\xi,\xi'\in\mathbb{R}^n$, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ に対して

$$\alpha_1 x(\cdot;a,\xi_1) + \alpha_2 x(\cdot;a,\xi_2) = x(\cdot;a,\alpha_1\xi+\alpha_2\xi') \tag{3.5}$$

となるから V は線形空間となる。特に、$e_1 = {}^t(1,0,\dots,0),\dots,e_n = {}^t(0,\dots,0,1)$ に対して $\varphi_k = x(\cdot;a,e_k)$ とすると、$\forall\xi = {}^t(\xi_1,\dots,\xi_n)$ に対して、(3.5) により $x(\cdot;a,\xi) = \sum_{k=1}^n \xi_k\varphi_k$. 即ち、$\varphi_1,\dots,\varphi_n$ は V を張る。一方、$c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ に対して $c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n = 0$ とすると、$t=a$ とおけば $c_1e_1+\cdots+c_ne_n=0$ となり $c_1=\cdots=c_n=0$. よって、$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ は一次独立となり $\dim V = n$ を得る。(2) 演習問題とする。 $\square$

定義 3.1 定理 *3.3* の証明の φ_k に対して n 次正方行列 $R(t,a) = (\varphi_1(t)\cdots\varphi_n(t))$ で定義する。この $R(t,a)$ を線形方程式 *(3.3)* の**解核行列** *(resolvent matrix)* または**素解**という。

このとき、定理 3.3 の証明で見たように $x(t;a,\xi) = R(t,a)\xi$ が成立する。

命題 3.4 *(0)* $R(t,t) = I$ *(*単位行列*)*
(1) $R(s,t) = R(s,u)R(u,t)$ $(s,u,t \in I)$
(2) $R(s,t)$ は正則で $R(s,t)^{-1} = R(t,s)$
(3) $\dfrac{\partial}{\partial s}R(s,t) = A(s)R(s,t), \dfrac{\partial}{\partial t}R(s,t) = -R(s,t)A(t).$

証明: (0) 自明. (1) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ に対して、$x(s;u,R(u,t)\xi), x(s;t,\xi)$ は、どちらも $x' = A(s)x$ の解で、時刻 u において $x(u;u,R(u,t)\xi) = R(u,t)\xi = x(u;t,\xi)$ となるので解の一意性により $x(s;u,R(u,t)\xi) = x(s;t,\xi)$. これを解核行列で表すと $R(s,u)R(u,t)\xi = R(s,t)\xi$ となるから主張を得る。(2) (1) で $s = t$ ととると (0) より $I = R(t,t) = R(t,u)R(u,t)$ となり従う。(3) R の定義より $\frac{d}{ds}\varphi_k = A(s)\varphi_k$ であるから前者は明らか。後者のために、まず、$R(t,s)R(s,t) = I$ の両辺を t について微分して

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t,s)R(s,t) + R(t,s)\frac{\partial R}{\partial t}(s,t) = O$$

を得る。よって、これを前者と組み合わせることにより

$$\frac{\partial}{\partial t}R(s,t) = -R(t,s)^{-1}\frac{\partial R}{\partial t}(t,s)R(s,t) = -R(s,t)A(t)R(t,s)R(s,t) = -R(s,t)A(t). \quad \square$$

定理 3.5 *(***Wronskian, ロンスキー行列式***)* $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ の一次独立な解 $x_1, \ldots, x_n$ に対して $U(t) = (x_1(t) \cdots x_n(t))$ とおく。このとき、

$$\det U(t) = \exp\left(\int_s^t \operatorname{tr} A(u)\,du\right)\det U(s) \tag{3.6}$$

となる。ここで、$A = (a_{ij})$ の対し、$\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ は A の跡 *(trace)* を表す。

問 3.1 $n = 3$ の場合に定理 *3.5* を証明せよ。
ヒント*:* $y(t) := \det U(t)$ に対し、$y'(t) = \operatorname{tr} A(t)y(t)$ を示せ。

問 3.2 $A(t)$ が歪対称、*i.e.,* ${}^tA(t) = -A(t)$ であるとき、$x' = A(t)x$ について次を示せ。

(1) 解は $|x(t)| \equiv |x(0)|$. *(2)* 解核行列 $R(s,t)$ は直交行列.

ヒント*: (1)* $\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = 0$*, (2)* $\frac{\partial}{\partial s}\{{}^tR(s,t)R(s,t)\} = O$ をまず示せ。

命題 3.6 $v_1, \ldots, v_n$ を *(3.3)* の一次独立な解とし、n 次正方行列を $V(t) = (v_1(t) \cdots v_n(t))$ で定義する。定理 *3.3 (2)* により $V(t)$ は正則であるが、このとき $R(t,a) = V(t)V(a)^{-1}$ とおくとこれは解核行列となる。

証明: $V(a)V(a)^{-1} = I$ であり、$\frac{d}{dt}V(t)V(a)^{-1} = A(t)V(t)V(a)^{-1}$ となるから従う。 $\square$

3.1.2 非同次系の場合

この節では非同次系の場合、即ち、線形方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), \qquad x(a) = \xi \tag{3.7}$$

の一意解を $x(t;a,\xi)$ とおき、同じ $A(t)$ に対する同次系の場合 (3.3) の一意解を $x_0(t;a,\xi)$ と表すこととする。また、それぞれの解全体を

$$V_b = \{\, x(\cdot;a,\xi)\,;\, \xi \in \mathbb{R}^n \,\}; \quad V_0 = \{\, x_0(\cdot;a,\xi)\,;\, \xi \in \mathbb{R}^n \,\} \tag{3.8}$$

とおく。

定理 3.7 *(1)* $x_* \in V_b$ とすると $V_b = \{\, x_0 + x_*\,;\, x_0 \in V_0 \,\}$.
(2) *(***定数変化法***)* $R(s,t)$ を *(3.3)* の解核行列とすると、

$$x(t;a,\xi) = R(t,a)\xi + \int_a^t R(t,s)b(s)\,ds. \tag{3.9}$$

証明: (1) "$\supset$" は明らか。"$\subset$"; $\forall x \in V_b$ に対し $\hat{x} := x - x_*$ は

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A(t)x + b(t) - (A(t)x_* + b(t)) = A(t)\hat{x}$$

となり $\hat{x} \in V_0$ を得る。(2) (1) より $\xi = 0$ として示せばよい。命題 3.4 により

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\int_a^t R(t,s)b(s)\,ds\right\} &= R(t,t)b(t) + \int_a^t A(t)R(t,s)b(s)\,ds \\ &= b(t) + A(t)\int_a^t R(t,s)b(s)\,ds \quad \square \end{aligned}$$

例 3.1 *(1) (***単振動***) 1* 点を固定された摩擦のない水平面に置かれたバネの運動はフックの法則により $m\ddot{x} = -kx$ に従う。*(*$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.*)* これを解こう。
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ とすると、方程式は $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる。この初期値 $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる解はそれぞれ $\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\omega\sin\omega t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^{-1}\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$ であるから解核行列は $R(t,s) = \begin{pmatrix} \cos\omega(t-s) & \omega^{-1}\sin\omega(t-s) \\ -\omega\sin\omega(t-s) & \cos\omega(t-s) \end{pmatrix}$ となる。

これより、$x(0) = a, x'(0) = b$ なる解は

$$x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t$$

である。ただし、$\omega = \sqrt{k/m}$ とした。

*(2) (***強制振動***)* 単振動において、バネを固定している壁が周期的な外力 $f(t)$ を受けて移動する場合

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \qquad f(t) = \varepsilon\cos\nu t$$

となる。これを解こう。

$b(t) = {}^t(0, f(t))$ とおき、公式 *(3.9)* に代入する*:*

$$R(t,s)b(s) = \frac{\varepsilon}{\omega}\begin{pmatrix} \sin\omega(t-s)\cos\nu s \\ \omega\cos\omega(t-s)\cos\nu s \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{2\omega}\begin{pmatrix} \sin(\omega(t-s)+\nu s) + \sin(\omega(t-s)-\nu s) \\ \omega\cos(\omega(t-s)-\nu s) + \omega\cos(\omega(t-s)+\nu s) \end{pmatrix}$$

(i) $\omega \neq \nu$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) &= \left[R(t,0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_0^t R(t,s)b(s)\,ds \right] \text{ の第 } \mathit{1} \text{ 成分} \\ &= a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + \frac{\varepsilon}{\omega^2 - \nu^2}(\cos\nu t - \cos\omega t). \end{aligned}$$

(ii) $\omega = \nu$ のとき

$$x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + \frac{\varepsilon}{2\omega} t\sin\omega t.$$

となり、*(i)* の場合と異なり $\overline{\lim}_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ となる。これはパラメータ共振 *(resonance)* を表している。

3.2 定数係数線形微分方程式

3.2.1 行列の指数関数

$M_n(\mathbb{C})$ で n 次正方行列全体を表す。(3.2) で定めた A のノルム $\|A\|$ は $M_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^{n^2}$ (または $\mathbb{R}^{2n^2}$) と見なしたときのノルムとなっている。従って、完備であることに注意する。

補題 3.8 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し
(0) $\|cA\| = |c|\|A\|$ *(1)* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *(2)* $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

証明: (0) 明らか。(1) A を通常の $\mathbb{C}^{n^2}$ の距離なので明らか。(2) Schwarz の不等式より

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \Big|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\Big|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\Big) = \|A\|^2\|B\|^2. \qquad \square$$

定理 3.9 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする。
(1) $S_m(A) := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}A^k$ は $\|\cdot\|$ で *Cauchy* 列となる。従って、$\mathbb{C}^{n^2}$ の完備性によりその極限が存在する。その極限を e^A で表す。
(2) e^{tA} *(*$t \in \mathbb{R}$*)* は t に関して解析的 *(*各成分が解析的*)* であり、$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

証明: (1) $m > m'$ のとき補題 3.8 により

$$\|S_m(A) - S_{m'}(A)\| = \Big\|\sum_{k=m'+1}^m \frac{1}{k!}A^k\Big\| \leq \sum_{k=m'+1}^m \frac{1}{k!}\|A\|^k \to 0 \quad \text{as } m, m' \to \infty.$$

(2) (1) より $\forall R > 0$ に対して $|t| < R$ 上で $\{S_m(tA)\}$ の各成分は一様収束するから、e^{tA} は解析的。特に、

$$\frac{d}{dt}S_m(A) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}kt^{k-1}A^k = A\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}t^lA^l = AS_{m-1}(tA)$$

となるから $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ を得る。上式で第 2 の等号は $l = k - 1$ とおいた。 $\square$

定理 3.10 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする。このとき、初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(a) = \xi \tag{3.10}$$

の解は唯一つ存在して $x(t) = e^{(t-a)A}\xi$ で与えられる。

証明: 存在と一意性は明らか。$x(t) = e^{(t-a)A}\xi$ が (3.10) の解であることは定理 3.9 (2) より直ちに従う。 $\square$

命題 3.11 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ とする。
(1) (a) $AB = BA \iff$ *(b)* $e^{tA}e^{sB} = e^{sB}e^{tA}$ $(s, t \in \mathbb{R}) \iff$ *(c)* $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ $(t \in \mathbb{R})$.
(2) e^A は正則で $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
(3) 正則な P に対して、$P^{-1}e^AP = e^{P^{-1}AP}$.
(4) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

証明: (1) (a) $\Longrightarrow$ (c): $m \to \infty$ のとき

$$\|S_m(tA)S_m(tB) - S_m(t(A+B))\| \le \sum_{1 \le k, l \le m: k+l \ge m+1} \frac{|t|^{k+l}\|A\|^k\|B\|^l}{k!l!} \le \frac{m^2C^{2m}}{2([m/2]!)^2} \to 0$$

となり従う。ここで、$C = \max\{\|tA\|, \|tB\|, 1\}$ とおいた。(c) $\Longrightarrow$ (b) は明らか。
(b) $\Longrightarrow$ (a): 両辺を s, t で偏微分して、$s = t = 0$ とすればよい。
(2) A と $-A$ は可換だから (1) (c) より $e^Ae^{-A} = e^{A-A} = I$.
(3) $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k$, $k \in \mathbb{N}$, により $P^{-1}S_m(A)P = S_m(P^{-1}AP)$ となるので $m \to \infty$ として得られる。
(4) 定理 3.5 の証明と同様にできるので略す。 $\square$

注意 3.1 定理 *3.10* で A が t に依存する場合、$x' = A(t)x$ の解核行列は一般には $e^{\int_s^t A(u)\,du}$ とはならない。ただし、例えば $A(t)$ と $\int_s^t A(u)\,du$ が可換ならば解核行列となっている。[15]

<u>e^{tA} の求め方:</u>

(a) A が対角行列のとき: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ に対し $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ より

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(b) J が Jordan 細胞のとき: $t_k = t^k/k!$ とすると,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ に対し } e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ 0 & t_0 & t_1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t_2 \\ & & & t_0 & t_1 \\ 0 & & & 0 & t_0 \end{pmatrix}$$

[15] 2 次正方行列の場合、この 2 つが可換であれば $A(t) = a(t)I + b(t)C$ (C は定数行列) であることが示される。*cf*. [K] p.101.

(c) 一般の行列 A に対しては正則行列 P を適当にとることにより、その Jordan 標準形に変形できる。これを命題 3.11 (3) と組み合わせ:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix} \text{ より } P^{-1}e^{tA}P = e^{tP^{-1}AP} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix}$$

実際に Jordan 標準形を導くのは大変である。次の線形代数の定理を用いるほうが現実的である。証明は次の節で述べる。

定理 3.12 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し、その固有多項式を

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \tag{3.11}$$

とする[16]。$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は相異なる A の固有値で $m_1, \ldots, m_r$ はその重複度である。このとき、次の性質をもつ r 個の行列 $P_1, \ldots, P_r$ が A に対して一意的に定める:

(1) $P_1, \ldots, P_r$ は射影である、即ち、$P_i^2 = P_i$; $P_iP_j = O$ $(i \neq j)$; $P_1 + \cdots + P_r = I$ を満たす。

(2) $1 \leq l_j \leq m_j$ を満たす整数 l_j があって、$(\lambda_j I - A)^{l_j - 1}P_j \neq 0$, $(\lambda_j I - A)^{l_j}P_j = 0$.

(3) $N = A - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j$ とおくと、N はべき零である。そして、"$N = O$" と "A は対角化可能" とは同値な条件で、それはまた、"$l_1 = \cdots = l_r = 1$" とも同値である。

(4) P_j は A の多項式で表される。従って A と可換である。

A が対角化可能のときは、P_j は次の *Lagrange* の補間式で与えられる:

$$P_j = \frac{\prod_{1 \leq k \leq r : k \neq j}(A - \lambda_k I)}{\prod_{1 \leq k \leq r : k \neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{3.12}$$

A が一般の場合には、P_j は次のようにして求められる:

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}} \tag{3.13}$$

と部分分数展開して、両辺に Φ をかけると、

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda).$$

ただし $g_j(\lambda) = \Phi(\lambda)/(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$ とした。このとき、

$$P_j = h_j(A)g_j(A) \tag{3.14}$$

でなる。

[16]固有多項式を線形代数では特性多項式と呼んだものである。

定義 3.2 上の定理で定まる $P_1, \ldots, P_r$ を A **に付随する射影**という。また、このとき

$$A = \sum\nolimits_{j=1}^{r} \lambda_j P_j + N \tag{3.15}$$

と分解されるが、$\sum \lambda_j P_j$ を A の**半単純部分**, N を**べき零部分**という。またこの分解を A の **Jordan 分解**, または**一般スペクトル分解**という。$N = O$ のとき、A は**半単純**であるという。また A を P_j の一次結合で表すこの分解を、A の**スペクトル分解**という。*(A が半単純であることと、対角化可能であることは同値である。)*

定理 3.13 定理 *3.12* の記号の下、A に付随する射影を $P_1, \ldots, P_r$ とすると、

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j t}\Big\{I + \frac{t}{1!}(A - \lambda_j I) + \cdots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(A-\lambda_j I)^{m_j-1}\Big\}P_j \tag{3.16}$$

である。

証明: $e^{tA} = e^{tA}(P_1 + \cdots + P_r)$ と分解し

$$e^{tA}P_j = e^{t(A-\lambda_j I+\lambda_j I)}P_j = e^{t\lambda_j I}e^{t(A-\lambda_j I)}P_j = e^{t\lambda_j}e^{t(A-\lambda_j I)}P_j$$

であるが、$(A-\lambda_j I)^{l_j}P_j = O$ より、$e^{tA}P_j = e^{t\lambda_j}\sum_{k=0}^{l_j-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda_j I)^k P_j$ となり従う。[17]
□

例題 3.1 *(1)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. このとき固有値は $i, -i$ で、ともに単根だから、

$$P_1 = \frac{A+iI}{i+i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A-iI}{-i-i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、$e^{it} = \cos t + i\sin t$ に注意して

$$e^{tA} = e^{it}P_1 + e^{-it}P_2 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A は対称行列だから対角化可能である。固有値は -1*(*2 重根*)*, 2 である。従って *(3.12)* により

$$P_1 = \frac{A-2I}{-1-2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{A+I}{2+1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[17] (3.16) で実際は $(A-\lambda_j I)^k = O$ $(k \geq l_j)$ であるが、l_j を求める手間を省くためそのように記した。

とすれば、$e^{tA}=e^{-t}P_1+e^{2t}P_2$ となる。

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. A の固有値を計算すると $\lambda_1=1$*(2*重根*)*, $\lambda_2=2$ である。A は対角化可能かわからないので、固有多項式の逆数の部分分数展開から P_1, P_2 を求める。

$$\frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}=\frac{-\lambda}{(\lambda-1)^2}+\frac{1}{\lambda-2}$$

であるから、$1=-\lambda(\lambda-2)+(\lambda-1)^2$ を得る。従って、

$$P_1=-A(A-2I)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2=(A-I)^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。P_2 に対応する固有値 $\lambda_2=2$ は単根だから $l_2=m_2=1$ である。一方、$(A-I)P_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$ であるから

$$e^{tA}=e^t\{I+t(A-I)\}P_1+e^{2t}P_2=e^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+te^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 3.3 次の微分方程式を解け。ただし、初期値を $x(0)=x_0$ とする。

(1) $x'=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}x.$ *(2)* $x'=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}x.$

(3) $x'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}x.$ *(4)* $x'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}x.$

(5) $x'=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}x.$ *(6)* $x'=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}x.$

(7) $x'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}x.$ *(8)* $x'=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 1 & 10 & -4 \\ 3 & 28 & -11 \end{pmatrix}x.$

ヒント*: (2)* 固有値は $\pm i$. $i, -i$ に対応する射影をそれぞれ P_1, P_2 とすると、$\overline{P_1}=P_2$ となる。答えは $x(t)=\left\{\cos t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}x_0$. *(8)* も同様で答えは

$$x(t)=\left\{\frac{e^t}{5}\begin{pmatrix} 4 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}+\frac{\cos 2t}{5}\begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 60 & -20 \end{pmatrix}+\frac{\sin 2t}{10}\begin{pmatrix} 6 & 56 & -24 \\ 5 & 50 & -20 \\ 14 & 144 & -56 \end{pmatrix}\right\}x_0.$$

問 3.4 *(定数変化法 (cf. 定理 3.7) の補充問題)* 次の微分方程式の一般解を求めよ[18]。

(1) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{t} \end{pmatrix}.$ *(2)* $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} x + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(3) $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x + e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$ *(4)* $x' = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} x + \sin t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3.2.2 一般スペクトル分解

この節では定理 3.12 の証明を述べる。

定理 3.14 *(**Cayley-Hamilton**)* *(3.11)*で定義した $\Phi(\lambda)$ に対して、$\Phi(A) = O$ となる[19]。

証明: $A = (a_{ij})$ と $e_1 = {}^t(1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$ に対して $Ae_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$ より

$$a_{1j}e_1 + \cdots + (a_{jj} - A)e_j + a_{nj}e_n = 0, \qquad 1 \le j \le n.$$

これを行列のように表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} - A & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - A & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

となる。これの ij 成分を $\tilde{a}_{ij}$ で表す、即ち、$\tilde{a}_{ij} = a_{ij}I$, $(i \neq j)$ $a_{jj} = a_{jj}I - A$ として、この "行列" $(\tilde{a}_{ij})$ の余因子行列を $\Delta(A)$ とする。ここで、$\Delta(A)$ の各成分は A の多項式となっていることに注意する。この $\Delta(A)$ を左から (3.17) にかけると

$$\begin{pmatrix} \Phi(A) & O & \cdots & O \\ O & \Phi(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & \Phi(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る[20]。よって、$\Phi(A)e_j = 0$ $(1 \le j \le m)$ となるので、$\Phi(A) = O$ を得る。 □

n 次正方行列 A の固有多項式が (3.11) であるとする。このとき、$\mathbb{C}^n$ の部分空間

$$G_{\lambda_j} = \{\, x\,;\, (\lambda_j I - A)^{m_j} x = 0 \,\}$$

を λ_j の**一般固有空間**という。このとき、次が成立する:

定理 3.15 $G_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_r} = \mathbb{C}^n$ *($\oplus$ はベクトル空間の直和を表す。)*

補題 3.16 λ の多項式 $f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)$ のどの *2* つも共通の根をもたないとする。このとき

$$E_j := \{\, x\,;\, f_j(A)x = O \,\} \quad (j = 1, \ldots, r); \qquad E_0 := \{\, x\,;\, f_1(A) \cdots f_r(A)x = O \,\}$$

---

[18] [KM] 加藤義夫, 三宅正武共著: 微分方程式演習 サイエンス社, p.89 より。

[19] 一般に多項式 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ に対して $f(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI$ と解釈するものとする。

[20] 一般に、行列 A の余因子行列を B とすると $BA = \det AI$ となることと同様に示せる。

の間には $E_0 = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ という関係式が成立する。

証明: $r = 2$ で示す。(一般の場合はそれを繰り返し用いればよい。) どの 2 つも共通の根をもたないから[21]、ある多項式 h_1, h_2 が存在して

$$f_1(\lambda)h_1(\lambda) + f_2(\lambda)h_2(\lambda) \equiv 1$$

とすることができる。λ に A を代入すると

$$f_1(A)h_1(A) + f_2(A)h_2(A) = I. \tag{3.18}$$

よって、$\forall x$ に対し $x_1 = f_2(A)h_2(A)x$, $x_2 = f_1(A)h_1(A)x$ とすると、$x = x_1 + x_2$ となる。このとき、

$$f_1(A)x_1 = h_2(A)\{f_1(A)f_2(A)x\} = 0; \quad f_2(A)x_2 = h_1(A)\{f_1(A)f_2(A)x\} = 0$$

となり、$x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ を得る。

次に分解の一意性を示す。$x \in E_0$ に対し

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \qquad x_1, y_1 \in E_1, \quad x_2, y_2 \in E_2$$

とできたとする。このとき、$z := x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in E_1 \cap E_2$ であるから (3.18) により $z = h_1(A)f_1(A)z + h_2(A)f_2(A)z = 0.$ □

定理 3.15 の証明: 定理 3.14 により $\Phi(A) = O$ であるから、(3.11) と補題 3.16 から主張は従う。 □

定理 3.12 の証明: (1) は補題 3.16 と定理 3.15 とその作り方から $P_iP_j = O$ $(i \neq j)$, $P_1 + \cdots + P_r = I$ は従う。特に、$P_i^2 = P_i(P_1 + \cdots + P_r) = P_i$ となる。(4) も同様に明らか。
(2) は $(\lambda_j I - A)^{m_j} P_j = 0$ より明らか。このとき、$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{l_r}$ とおくと $\varphi(A) = O$ となる。実際、$\varphi(A) = \varphi(A)\{P_1 + \cdots + P_r\}$ であるが、

$$\varphi(A)P_j = \left\{\prod\nolimits_{1 \le k \le r : k \neq j} (A - \lambda_k I)^{l_j}\right\}(A - \lambda_j)^{l_j} P_j = O$$

より $\varphi(A) = O$ が従う。(この φ を最小多項式という。)
(3) について $N = A - \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j = \sum_{j=1}^r (A - \lambda_j)P_j$ とおくと、A と $P_1, \ldots, P_r$ は可換で $P_iP_j = O$ $(i \neq j)$ であるから $N^n = \sum_{j=1}^r (A - \lambda_j)^n P_j = O$ となり N はべき零。特に、$N = O$ ならば $l_1 = \ldots = l_r = 1$ となる。また、A が対角化可能とすると、ある正則な行列 T が存在して $T^{-1}AT = D$ (D は対角行列) とできる。よって、$AT = TD$ となるから、$T = (\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_n)$ とかくと、各 $\boldsymbol{l}_j$ に対してある λ_k があって $A\boldsymbol{l}_j = \lambda_k \boldsymbol{l}_j$ とできるので、λ の固有空間を $F_\lambda = \{\, x\,;\, (\lambda I - A)x = 0 \,\}$ とかくと、$\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_n \in F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r}$ となり、$F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r} = \mathbb{C}^n$ が従う。よって、F_{λ_j} への射影を P_j とすると、

$$Ax = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r)x + (A - \lambda_1 I)P_1 x + \cdots + (A - \lambda_r I)P_r x = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r)x$$

より、$N = O$ が従う。最後に、$l_1 = \cdots = l_r = 1$ とすると、補題 3.16 から $F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r} = \mathbb{C}^n$ となるから、$\boldsymbol{l} \in F_{\lambda_j}$ なら $A\boldsymbol{l} = \lambda_j \boldsymbol{l}$ であるので、$\mathbb{C}$ の基底 $\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_n$ を $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_r}$ から選べば、$T = (\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_n)$ とおけば、$T^{-1}AT$ は対角行列になる。

[21] この授業ではこの部分に深入りしない。詳しくは代数学の本を参照のこと

最後に (3.12) を示す。このためには (3.13) の $\Phi(\lambda)$ を最小多項式 $\phi(\lambda)$ に取り替えて部分分数展開し、その $h_j(A)g_j(A)$ に対応する多項式が (3.12) となることを示せばよい。このとき、実際に (3.13) のように $1/\varphi(\lambda) = a_1/(\lambda-\lambda_1)+\cdots+a_r/(\lambda-\lambda_r)$ とおくと、$1 = a_1g_1(\lambda)+\cdots+a_rg_r(\lambda)$, $(g_j(\lambda) := \varphi(\lambda)/(\lambda-\lambda_j))$ となるので、$\lambda=\lambda_j$ を代入して $a_jg_j(\lambda_j) = 1$ となり、$P_j = g_j(A)/g_j(\lambda_j)$ で与えられること、即ち、(3.12) が示される。
□

3.3 単独方程式の場合

この節では 1 つの式からなる n 階線形方程式

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x = f(t) \tag{3.19}$$

を考える。$f(t)$ は力学の用語を流用して強制項ということがある。$f(t)\equiv 0$ とした方程式

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x = 0 \tag{3.20}$$

を (3.19) の**斉次方程式**という。ここで、$a_1(t),\ldots,a_n(t)$ は区間 I 上で連続とする。

この方程式を注意 2.1 のように $x^k = x^{(k-1)}$, $k=1,\ldots,n$ とし連立方程式として表すと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

となる。よって、$x(t)$ が (3.20) の解であれば ${}^t(x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))$ は (3.21) の解であり、一方、${}^t(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^n(t))$ が (3.21) の解であれば $x_1(t)$ は C^n-級で (3.20) の解となる。特に、定理 3.3 と次の命題 3.17 により方程式 (3.19) の解は線形独立な n 個の解 $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ の線形結合で表されることがわかる。

命題 3.17 *I 上の C^{n-1} 級関数 $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ は、もしその Wronskian (ロンスキー行列式) $W(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t)\\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t)\\ & \cdots & \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$ が $W(t)\neq 0$ を満たすとき一次独立となる。*

証明: $c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t)=0$ とすると、$\forall k$ に対し $c_1x_1^{(k)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(k)}(t)=0$ となるので、その Wronskian が 0 でないが、$c_1=\cdots=c_n=0$ を得る。 □

注意 3.2 *この命題で、(3.19) の n 個の解 $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ が一次独立であることと、Wronskian が $W(t)\neq 0$ となることは同値である。特に、$\operatorname{tr}A(t) = -a_1(t)$ に注意して定理 3.5 を用いると $W(t) = e^{-\int_s^t a_1(u)\,du}W(s)$ となるから、ある $t\in I$ で $W(t)\neq 0$ であれば、$\forall t\in I$ で $W(t)\neq 0$ となる。*

3.3.1 定数係数斉次方程式

この節では斉次方程式 (3.20) で特に係数 $a_1, \ldots, a_n$ が定数の場合を考える。このとき、(3.21) に注意し固有多項式を計算すると

$$\Phi(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

となる。これが (3.11) のように $\Phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$ とできたとする。($\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を特性根という。) このとき、$e(\lambda) = {}^t(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$, $\hat{p}(\lambda) = (0, \ldots, 0, \Phi(\lambda))$ とすると、

$$Ae(\lambda) = \lambda e(\lambda) - \hat{p}(\lambda)$$

となり、これを k 回微分すると、

$$Ae^{(k)}(\lambda) = \lambda e^{(k)}(\lambda) + ke^{(k-1)}(\lambda) - \hat{p}^{(k)}(\lambda)$$

となる。特に $\hat{p}^{(k)}(\lambda_j) = 0$, $(0 \le k \le m_j - 1)$ であるから、$e_{j,k} = e^{(k)}(\lambda_j)/k!$, $(1 \le j \le r;$ $0 \le k \le m_j - 1)$ と定義すれば

$$Ae_{j,0} = \lambda_j e_{j,0}, \qquad Ae_{j,k} = \lambda_j e_{j,k} + e_{j,k-1},$$

即ち、$P = (e_{1,0}\cdots e_{1,m_1-1}\cdots e_{r,0}\cdots e_{1,m_r-1})$ とおくと、$P^{-1}AP = J$ となる。ただし、

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}, \qquad J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とし、$J_m(\lambda)$ は Jordan 細胞で m 次正方行列とした。したがって、p.19 (c) のように $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$ と計算でき[22]、(3.21) の解は計算できる。特に、そこの各成分に現れるのは n 個の一次独立な関数

$$e^{t\lambda_1}, te^{t\lambda_1}, \cdots, t^{m_1-1}e^{t\lambda_1}\,;\ e^{t\lambda_2}, te^{t\lambda_2}, \cdots, t^{m_2-1}e^{t\lambda_2}\,;\ \cdots\,;\ e^{t\lambda_r}, te^{t\lambda_r}, \cdots, t^{m_r-1}e^{t\lambda_r} \quad (3.22)$$

の一次結合であり、特にこの第 1 行目に着目することで (3.20) の解は上記の関数の一次結合で与えられることがわかる[23]。

例題 3.2 *(1)* $x''' + x'' - x' - x = 0.$ *(2)* $x'' + 2x' + 5x = 0.$ *(3)* $x'''' + 2x'' + x = 0.$

解: (1) $D^3 + D^2 - D - 1 = (D+1)^2(D-1)$ であるから、$x = (c_1e^{-t} + c_2te^{-t}) + c_3e^t.$
(2) $D^2 + 2D + 5 = (D+1+2i)(D+1-2i)$ であるから、$x = c_1e^{(-1+2i)t} + c_2e^{(-1-2i)t} = c_3e^{-t}\cos 2t + c_4e^{-t}\sin 2t.$ ただし、$c_3 = c_1 + c_2$, $c_4 = i(c_1 - c_2)$ とした。

[22] $\det P = \prod_{k\ne l}(\lambda_k - \lambda_l) \ne 0$ に注意せよ (*cf*. Vandermonde の行列式)。

[23] 逆に (3.22) の関数がそれぞれ方程式 $(D-\lambda_1)^{m_1}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}x = 0$ を満たすことと、解空間の次元が n であることからも (3.20) の解がこの一次結合となることが従う。ただし、$D = \frac{d}{dt}$ とした。

(3) $D^4+2D^2+1=(D^2+1)^2=(D-i)^2(D+i)^2$ であるから、$x=c_1e^{it}+c_2te^{it}+c_3e^{-it}+c_4te^{-it}=(c_5+tc_6)\cos t+(c_7+tc_8)\sin t.$ ただし、$c_5=c_1+c_3$, $c_6=c_2+c_4$, $c_7=i(c_1-c_3)$, $c_8=i(c_2-c_4)$ とした。 □

3.3.2 非斉次方程式

この節では方程式 (3.19) で特に係数 $a_1,\dots,a_n$ が定数の場合を考える。この場合も定理 3.7 の場合と同様に、(3.19) の解 $x_*(t)$ が 1 つ見つかれば、 (3.20) の勝手な解 $x(t)$ に対して、$x_*(t)+x(t)$ は (3.19) の解となり、一般解が得られる。ここでは $x_*(t)$ の見つけ方を説明する。

補題 3.18

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n\cdots dt_2dt_1=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s)\,ds$$

証明: $n=1$ のときは明らか。n のとき正しいとすると、$n+1$ のとき、

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_n} f(t_{n+1})\,dt_{n+1}dt_n\cdots dt_1=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\frac{(\tau-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s)\,dsd\tau\\&=\int_{t_0}^{t}f(s)\int_{s}^{t}\frac{(\tau-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau ds=\int_{t_0}^{t}f(s)\left[\frac{(\tau-s)^n}{n!}\right]_{\tau=s}^{t}d\tau ds=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^n}{n!}f(s)\,ds.\end{aligned}$$

ここで、第 1 の等号は帰納法の仮定、2 行目第 1 の等号は積分の順序交換を行った。 □

(1) 簡単な場合から考える:

$$(D-a)^n x=f(t) \tag{3.23}$$

ここで、$D=\frac{d}{dt}$ である。このとき、両辺に e^{-at} を掛けると Leipniz の公式により

$$D^n(e^{-at}x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-a)^k e^{-at}D^{n-k}x=e^{-at}(D-a)^n x=e^{-at}f(t)$$

となる。よって、両辺を n 回不定積分すると、補題 3.18 により

$$e^{-at}x=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-as}f(s)\,ds+\sum_{j=1}^{n}c_jt^{j-1}.$$

したがって、

$$x=\sum_{j=1}^{n}c_jt^{j-1}e^{at}+\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{a(t-s)}f(s)\,ds$$

を得る。ここで、上辺の右辺第 1 項は (3.23) で $f(t)\equiv 0$ のときの解なので、ここでの目的を考え書かないこととする。そこで 全く記号的に、$(D-a)^n x=f(t)$ の解として次のように表すこととする:

$$x=\frac{1}{(D-a)^n}\cdot f(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{a(t-s)}f(s)\,ds \tag{3.24}$$

(2) 一般の場合:

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r},$$

ただし、$\lambda_k \neq \lambda_j$ $(k \neq j)$ とする。このとき、部分分数展開により

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{m_r}} \tag{3.25}$$

とできたとする。このとき、

$$x(t) = \frac{1}{P(D)}f(t) = h_1(D)\frac{1}{(D-\lambda_1)^{m_1}}\cdot f(t) + \cdots + h_r(D)\frac{1}{(D-\lambda_r)^{m_r}}\cdot f(t) \tag{3.26}$$

とおくとき、$x(t)$ が $P(D)x = f(t)$ の解であることを示す。

実際、

$$f_k(t) = \frac{1}{(D-\lambda_k)^{m_k}}\cdot f(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{m_k-1}}{(m_k-1)!}e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds$$

とおくと、(1) より $(D-\lambda_k)^{m_k}f_k(t) = f(t)$ を満たすから、$P_k(\lambda) := P(\lambda)/(D-\lambda_k)^{m_k}$ とすると ($P_k(\lambda)$ は多項式であることに注意する)、

$$\begin{aligned} P(D)x(t) &= P(D)\{h_1(D)f_1 + \cdots + h_r(D)f_r\} \\ &= h_1(D)P_1(D)(D-\lambda_1)^{m_1}f_1 + \cdots + h_r(D)P_r(D)(D-\lambda_r)^{m_r}f_r \\ &= \{h_1(D)P_1(D) + \cdots + h_r(D)P_r(D)\}f \end{aligned}$$

となり、(3.25) より $h_1(\lambda)P_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)P_r(\lambda) = 1$ であるから (3.26) が $P(D)x = f(t)$ の解であることが従う。 □

(3) 特殊な場合: $f(t)$ が多項式と指数関数の積の場合の簡便な求め方を与える。

(a) $P(D)x = c$ (c は定数) 場合

もし、$P(0) = a_n \neq 0$ ならば、$Dx = \cdots = D^n x = 0$ より明らかに $x = c/a_n$ が解となる。

もし、$P(0) = 0$ ならば、$P(D) = D^pQ(D)$, $Q(0) \neq 0$ とできる。上より $D^p x = c/Q(0)$, 即ち、$x = (c/Q(0))\cdot t^p/p!$ が一つの解である。

(b) $(1-D)x = ct^m$ 場合

$(1-D)(1+D+\cdots+D^m) = 1-D^{m+1}$ を t^m にほどこすと $(1-D)(1+D+\cdots+D^m)t^m = t^m$. 従って、$x = c(1+D+\cdots+D^m)t^m$ が一つの解となる。

(c) $P(D)x = ct^m$ 場合

$P(0) \neq 0$ の場合、$P(\lambda) = P(0)(1-\lambda Q(\lambda))$ ($Q(\lambda)$ は多項式) とできる。よって、(b) と同様に

$$(1-DQ(D))(1+DQ(D)+D^2Q(D^2)+\cdots+D^mQ(D)^m)t^m = (1-D^{m+1}Q(D^{m+1}))t^m = t^m$$

より、$x = (c/P(0))(1+DQ(D)+D^2Q(D^2)+\cdots+D^mQ(D)^m)t^m$ が一つの解となる。

$P(0) = 0$ のときは、$P(D) = D^pQ(D)$, $Q(0) \neq 0$ とできる。$Q(D)D^px = ct^m$ と考え、D^px を求め、p 回積分すればよい。

(d) $P(D)x = t^me^{at}$ 場合

両辺に e^{-at} をかけて $e^{-at}P(D)x = P(D+a)(e^{-at}x) = t^m$ となるので、(c) に帰着できる。

例題 3.3 *(1)* $x'' + 3x' - 2x = 2t^3 - t$.　　*(2)* $x''' - x'' + x' = t^3$.
(3) $x'' - 3x' + 2x = te^{-t}$.　　*(4)* $x'' + 2x = t\cos t$.

解: (1) $(D^2 + 3D - 2)x = 2t^3 - t$ であるから、$-2(1 - \frac{3}{2}D - \frac{1}{2}D^2)x = 2t^3 - t$. よって

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 - \frac{3}{2}D - \frac{1}{2}D^2} \cdot (-t^3 + \frac{1}{2}t) \\ &= \Big(1 + \Big(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\Big) + \Big(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\Big)^2 + \Big(\frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\Big)^3\Big)(-t^3 + \frac{1}{2}t) \\ &= \Big(1 + \frac{3}{2}D + \frac{11}{4}D^2 + \frac{39}{8}D^3\Big)(-t^3 + \frac{1}{2}t) = -t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 16t - \frac{57}{2}. \end{aligned}$$

斉次式の解は $a_1 = (-3 + \sqrt{17})/2$, $a_2 = (-3 - \sqrt{17})/2$ とするとき、$c_1e^{a_1t} + c_2e^{a_2t}$ であるから、一般解は $c_1e^{a_1t} + c_2e^{a_2t} - t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 16t - \frac{57}{2}$.
(2) $(D^3 - D^2 + D)x = (1 - D + D^2)(Dx) = t^3$ と考えて、

$$\begin{aligned} Dx &= \frac{1}{1 - D + D^2} \cdot t^3 = \{1 + (D - D^2) + (D - D^2)^2 + (D - D^2)^3\}t^3 \\ &= (1 + D - D^3)t^3 = t^3 + 3t^2 - 6. \end{aligned}$$

よって、$x = t^4/4 + t^3 - 6t$. 斉次式については $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0$ を解いて、$\lambda = 0, (1 \pm \sqrt{3}i)/2$ であるから、求める一般解は

$$x = c_1 + c_2e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + c_3e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2) + t^4/4 + t^3 - 6t.$$

(3) $e^t(D^2 - 3D + 2)x = ((D-1)^2 - 3(D-1) + 2)(e^tx) = (D^2 - 5D + 6)(e^tx) = t$ であるから、

$$e^tx = \frac{1}{1 - \frac{5D}{6} + \frac{D^2}{6}} \cdot \frac{t}{6} = \{1 + \Big(\frac{5D}{6} - \frac{D^2}{6}\Big)\}\frac{t}{6} = \frac{t}{6} - \frac{5}{36}.$$

斉次式については $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解いて、$\lambda = 1, 2$ であるから、求める一般解は

$$x = c_1e^t + c_2e^{2t} + (t/6 - 5/36)e^{-t}.$$

(4) $\cos t = \mathrm{Re}\, e^{it}$ であるから、まず $(D^2 + 2)x = te^{it}$ の解を求め、その実部をとる。

$$\begin{aligned} &e^{-it}(D^2 + 2)x = ((D + i)^2 + 2)(e^{-it}x) = (D^2 + 2iD + 1)(e^{-it}x), \\ &e^{-it}x = \frac{1}{1 + 2iD + D^2} \cdot t = (1 - 2iD)t = t - 2i, \\ &x = e^{it}(t - 2i) = t\cos t + 2\sin t + i(t\sin t - 2\cos t). \end{aligned}$$

斉次式については $\lambda^2 + 2 = 0$ を解いて、$\lambda = \pm\sqrt{2}i$ であるから、求める一般解は

$$x = c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t + t\cos t + 2\sin t. \qquad \square$$

問 3.5 次の方程式の一般解を求めよ。*([K] p.77.[24])*

(1) $x''' + x = t^2$　　*(2)* $x'' - 3x' + 2x = te^{2t}$　　*(3)* $x'''' + 2x'' + x = \sin t$

(4) $x'' + x' = t^2 - 2t$　　*(5)* $x''' - 2x' + 4x = e^t\sin t$　　*(6)* $x''' + x' = 2\cos^2 t - t + e^t$

[24] **3.5** 解答 (特解のみ、一般解はこれに斉次式の解を加えたもの) : (1) t^2, (2) $(\frac{1}{2}t^2 - t)e^{2t}$, (3) $-\frac{1}{8}t^2\sin t$, (4) $\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$, (5) $-\frac{te^t}{20}(3\cos t + \sin t)$, (6) $-\frac{1}{6}\sin 2t + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^t$.

3.4　2 階線型方程式のいくつかの解法

線型方程式でも係数が t の関数の場合、一般には初等解法は存在しない。ここでは、いくつかのうまくいく場合を説明する。

(I) 特解　　2 階線型方程式

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x = 0 \tag{3.27}$$

について一つの解 $x = \varphi(t)$ が見つかれば、このとき $x = \varphi(t)y$ によって、x から y に変換すれば y' の 1 階線型方程式に帰着できるので、完全に解決される。

例題 3.4　　$(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$　を解け。

解: 一つの解として、$x = t$ がとれる。そこで $x = ty$ とおくと、$x' = ty' + y$, $x'' = ty'' + 2y'$ だから

$$t(1-t^2)y'' + 2(1-2t^2)y' = 0 \quad \text{即ち} \quad y'' = -\Big(\frac{2}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\Big)y'.$$

これを y' の 1 階方程式として解いて、

$$y' = \frac{c_1}{t^2(t^2-1)} = c_1\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big) - \frac{1}{t^2}\Big\}.$$

これから、$y = c_1\Big\{\dfrac{1}{2}\log\Big|\dfrac{t-1}{t+1}\Big| + \dfrac{1}{t}\Big\} + c_2$ である。x は

$$x = c_1\Big\{1 + \frac{t}{2}\log\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| + \frac{1}{t}\Big\} + c_2 t. \qquad \square$$

問 3.6 次の方程式の一つの解をみつけて、一般解を求めよ。*([K] p.77.*[25]*)*

(1)　$(1+t^2)x'' - tx' + x = 0$　　　*(2)*　$(3-t)x'' - (9-4t)x' + (6-3t)x = 0$

(II) 2 階線型方程式の標準形　　2 階線型方程式 (3.27) において、独立変数または従属変数の変換により 1 階微分の項を消去したものを、2 階方程式の**標準形**という。そのような変形により、定数係数の方程式に帰着できれば、初等的に解ける。ここでは従属変数の変換により標準形にする方法を説明する。(独立変数については [K p.71] を参照のこと (*cf.* 問 3.8)。)

$x = uy$ で x から y へ変換するとすると、$x' = uy' + u'y$, $x'' = uy'' + 2u'y' + u''y$ となるから、微分方程式 (3.27) は、

$$uy'' + (2u' + au)y' + (u'' + au' + bu)y = 0$$

となる。ここで、

$$2u' + au = 0 \tag{3.28}$$

[25] **3.6** 解答 (順に特解と一般解)：(1) t, $c_1(-\sqrt{1+t^2} + t\log(t+\sqrt{1+t^2})) + c_2 t$,　(2) e^t, $c_1 e^t + c_2(4t^3 - 42t^2 + 150t - 183)e^{3t}$.

即ち、$u = e^{-\int^t \frac{a(\tau)}{2} d\tau}$ とおくと、y' の項が消えて標準形を得る。そのとき

$$y'' + \Big(\frac{u''}{u} + a\frac{u'}{u} + b\Big)y = 0$$

であるが、(3.28) から

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2}a(t), \qquad \frac{u''}{u} = \Big(\frac{u'}{u}\Big)' + \Big(\frac{u'}{u}\Big)^2 = -\frac{a'(t)}{2} + \frac{a(t)^2}{4}$$

となるから、y に関する方程式 (3.29) が得られる。よって、次の定理が得られた。

定理 3.19 $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x = 0$ において、$x = ye^{-\int^t \frac{a(\tau)}{2} d\tau}$ によって x から y に変換すると、標準形

$$y'' + \Big(b(t) - \frac{a'(t)}{2} - \frac{a(t)^2}{4}\Big)y = 0 \tag{3.29}$$

を得る。

例題 3.5 $\quad x'' + 2tx' + t^2x = 0 \quad$ を解け。

解: $x = ye^{-\frac{1}{2}\int 2tdt} = ye^{-t^2/2}$ とおくと、(3.29) より $y'' - y = 0$. これを解いて、$y = c_1e^t + c_2e^{-t}$. よって、一般解は $x = e^{-t^2/2}(c_1e^t + c_2e^{-t})$. $\square$

問 3.7 次の微分方程式の従属変数を変換して、一般解を求めよ。*([K] p.77.*[26]*)*

(1) $t^2x'' - 2tx' + (2 + a^2t^2)x = 0$ *(2)* $(1 - t^2)x'' - 4tx' - (1 + t^2)x = t$

問 3.8 次の微分方程式を括弧内に指定された独立変数の変換を行い、一般解を求めよ。

$x'' + x' + e^{-2t}x = 0 \qquad$ *(*$s = e^{-t}$*)* *([K] p.77.*[27]*)*

3.5 比較定理

この節では 2 階線型方程式の解の挙動を知る方法のひとつとして、Strum の比較定理を扱う。2 階線型方程式 $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ において、$p(t) = e^{\int a(t)dt}$ をかけると

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0$$

の形になる。ここで、$q(t) = p(t)b(t)$ であり、$p(t) > 0$ である。このとき、次が成立する。

定理 3.20 *(***Strum の定理***)* $p(t) > 0,\ q_2(t) \geq q_1(t)$ とする。二つの微分方程式

$$(p(t){x_1}')' + q_1(t)x_1 = 0 \tag{3.30}$$
$$(p(t){x_2}')' + q_2(t)x_2 = 0 \tag{3.31}$$

[26]**3.7** 解答：(1) $t(c_1 \cos at + c_2 \sin at)$, (2) $(1 - t^2)^{-1}(c_1 \cos t + c_2 \sin t + t)$.
[27]**3.8** 解答：$c_1 \cos e^{-t} + c_2 \sin e^{-t}$.

において、同じ初期値を持つ解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を考える:

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0, \qquad {x_1}'(t_0) = {x_2}'(t_0) = {x_0}'.$$

このとき、$t \geq t_0$ において、$x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$ である限り

$$x_1(t) \geq x_2(t)$$

が成立する。

証明: それぞれの方程式に x_2, x_1 をかけて差をとると、

$$(p(t){x_1}')'x_2 - (p(t){x_2}')'x_1 + (q_1(t) - q_2(t))x_1x_2 = 0$$

これを t_0 から t まで積分すると、$x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$ である限り、

$$[p(x_1'x_2 - x_1x_2')]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (q_2(s) - q_1(s))x_1x_2\, ds \geq 0. \tag{3.32}$$

$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ で $p(t) > 0$ だから

$$x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t) \geq 0.$$

従って、

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\Big) = \frac{x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)}{x_2(t)^2} \geq 0.$$

即ち、$x_1(t)/x_2(t)$ は単調増加で、$x_1(t_0)/x_2(t_0) = 1$ だから主張を得る。 □

定理 3.21 二つの微分方程式 *(3.30), (3.31)* において、さらに、$q_2(t) \not\equiv q_1(t)$ とする。このとき、*(3.30)* の 0 でない解 $x_1(t)$ の隣り合う零点を t_1, t_2 *(*$t_1 < t_2$*)* とすると、*(3.31)* の任意の解 $x_2(t)$ は区間 (t_1, t_2) の中に少なくとも一つの零点をもつ。

証明: t_1, t_2 は隣り合う零点なので区間 (t_1, t_2) で $x_1(t) > 0$ として一般性を失わない。いま、$x_2(t)$ がこの区間で 0 にならないとすると、やはり $x_2(t) > 0$ としてかまわない。このとき、(3.32) と同様に

$$[p(x_1'x_2 - x_1x_2')]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_2(s) - q_1(s))x_1x_2\, ds > 0$$

となる。このとき、$x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$ だから

$$p(t_2)x_1'(t_2)x_2(t_2) - p(t_1)x_1'(t_1)x_2(t_1) > 0. \tag{3.33}$$

一方、$x_1(t_2) = 0, x_1(t) > 0\ (t_1 < t < t_2)$ だから、$x_1(t)$ は t_2 において減少であり、$x_1'(t_2) \leq 0$ である。もし、$x_1'(t_2) = 0$ なら解の一意性より $x_1(t) \equiv 0$ となる。従って $x_1'(t_2) < 0$. 同様の考察により、$x_1'(t_1) > 0$ もわかる。従って、

$$p(t_2)x_1'(t_2)x_2(t_2) - p(t_1)x_1'(t_1)x_2(t_1) \leq 0$$

となり、これは (3.33) 矛盾する。従って、$x_2(t)$ は (t_1, t_2) の中に少なくとも一つの零点をもつ。 □

系 3.22　微分方程式

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0 \qquad (p(t) > 0)$$

の二つの解 $x_1(t),\ x_2(t)$ において、$x_1(t)$ の隣り合う零点を t_1, t_2 *(*$t_1 < t_2$*)* とし、$x_2(t)$ は t_1, t_2 のどちらかで 0 でないとする。このとき、$x_2(t)$ の零点が t_1 と t_2 の間に少なくとも一つある。

証明: 定理 3.21 の証明と同じ方法で、もし $x_2(t) \neq 0$ $(t_1 < t < t_2)$ なら、$x_2(t) > 0$ として、

$$p(t_2)x_1'(t_2)x_2(t_2) - p(t_1)x_1'(t_1)x_2(t_1) = 0$$

となる。そして、$x_1'(t_2) < 0,\ x_1'(t_1) > 0$ でなければならない。$x_2(t_2),\ x_2(t_1)$ のどちらかが正だから、やはり矛盾である。従って、$x_2(t) = 0$ となる t が t_1 と t_2 の間にある。　□

定理 3.23　微分方程式

$$x'' + q(t)x = 0 \tag{3.34}$$

の 0 でない解 $x(t)$ ついて、次が成立する。
(i) $q(t) < 0$ *(*$t_1 < t < t_2$*)* ならば、$x(t)$ は区間 (t_1, t_2) の中に零点を高々一つしかもたない。
(ii) $0 < m \leq q(t) \leq M$ *(*$t_1 \leq t \leq t_2$*)* ならば、$x(t)$ の閉区間 $[t_1, t_2]$ における隣合う零点 τ_0, τ_1 *(*$\tau_0 < \tau_1$*)* は

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \tau_1 - \tau_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

をみたす。

証明: (i) $q(t) < 0$ $(t_1 < t < t_2)$ とし、$x(\tau_0) = 0$ とする。

$$x''(t) = -q(t)x(t)$$

だから、$x(t) > 0$ なら $x(t)$ は上に凸な関数、$x(t) < 0$ なら $x(t)$ は下に凸関数、$x(t) = 0$ となる点は変曲点である。従って、$x = x(t)$ のグラフは一つの零点 τ_0 の右側では τ_0 での接線より上にあり、左側では下にある。従って、τ_0 以外に零点はない。
(ii) (3.34) の解を x_1 とし、x_2 を微分方程式

$$x'' + mx = 0 \tag{3.35}$$

の解とする。$q(t) \geq m$ であるから、もし $q(t) \not\equiv m$ ならば、定理 3.21 の仮定をみたしている。(3.35) の解で $x_2(\tau_0) = 0,\ x_2'(\tau_0) = x_1'(\tau_0)$ をみたすものは

$$x_2(t) = \frac{x_1'(\tau_0)}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}(t - \tau_0)$$

で、この関数の τ_0 の次の零点は $\tau_2 = \tau_0 + \pi/\sqrt{m}$ である。定理 3.21 によって、τ_0 と τ_2 の間に (3.34) の任意の解の零点が少なくとも一つある。τ_0 と隣合う零点 τ_1 はそのうちの最小値だから、$\tau_1 - \tau_0 < \tau_2 - \tau_0 = \pi/\sqrt{m}$ である。同じ論法で $\pi/\sqrt{M} \leq \tau_1 - \tau_0$ もでる。　□

例 3.2　*(Airy の方程式)*　　$x'' - tx = 0$
の解は負の軸上に無限個の零点を持つ。比較定理により、$0 < m \leq -t \leq M$ の範囲では二つの隣合う零点の間隔は $\pi/\sqrt{M} \leq \tau_1 - \tau_2 \leq \pi/\sqrt{m}$ である。即ち、零点は $(-t)^{-1/2}$ の位数でその間隔が減少していく。