微分積分学 AD I，数学序論演習 I　2006 年 8 月 1 日の試験の解答の要点[1]

1 [8+12] (1) $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと $x=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}$.
$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{1}{t}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2})dt=\frac{1}{2}\log|t|-\frac{1}{4t^2}=\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2}$.

(2) $4x-3-x^2>0$ より $1<x<3$ に注意する。$t=\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$ とおくと $x=\frac{3t^2+1}{t^2+1}=3-\frac{2}{t^2+1}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}$.
$I:=\int\frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}dx=\int\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}dt=\int t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt=\int(\frac{4}{t^2+1}-\frac{4}{(t^2+1)^2})dt$. ここで $\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt$ より、$I=\int\frac{2}{t^2+1}dt-\frac{2t}{t^2+1}=2\,\mathrm{Arctan}\,t-\frac{2t}{t^2+1}=2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}+\sqrt{(3-x)(x-1)}$.

2 (1) [5] $t=2x-x^2$ とすると、$-2(x-1)dx=dt$ で $\begin{array}{c|c} x & 1\to 2 \\ \hline t & 0\to 1\end{array}$ より、(与式)$=\int_1^0\sqrt{t}(-\frac{1}{2})dt=\frac{1}{3}$.

(2) [10] $t=\mathrm{Arctan}\,x$ とすると、$dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$ で $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline t & 0\to \frac{\pi}{4}\end{array}$ より、(与式)$=\int_0^{\pi/4}t^2\tan t\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\pi/4}t^2(\frac{1}{2\cos^2 t})'dt=[\frac{t^2}{2\cos^2 t}]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}t(\tan t)'dt=\frac{\pi^2}{16}-[t\tan t]_0^{\pi/4}+\int_0^{\pi/4}\tan t\,dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+[-\log|\cos t|]_0^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$.

(3) [8] $F(x)=\frac{3}{2}(x+2)^{2/3}$ とおくと $F(x)$ は $[-2,0]$ で連続で $F'(x)=(x+2)^{-1/3}$ $(-2<x\le 0)$ であるから[2]、(与式)$=[\frac{3}{2}(x+2)^{2/3}]_{-2}^0=3/\sqrt[3]{2}$.

(4) [8] (与式)$=\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{dx}{x(x^2+1)}=\lim_{M\to\infty}\int_1^M(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx=\lim_{M\to\infty}(\frac{1}{2}\log\frac{M^2}{M^2+1}+\frac{1}{2}\log 2)=\frac{1}{2}\log 2$.

(5) [6] $t=\frac{\pi}{4}-x$ とすると、$dx=-dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to \frac{\pi}{4} \\ \hline t & \frac{\pi}{4}\to 0\end{array}$. よって、(与式) $=\int_0^{\pi/4}\log\{1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)\}dt=\int_0^{\pi/4}\log\{1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\}dt=\int_0^{\pi/4}\log\frac{2}{1+\tan t}dt=\frac{\pi}{4}\log 2-$(与式). 故に (与式) $=\frac{\pi}{8}\log 2$.

3 [6 × 2+8] (1) $|\frac{\sin x}{1+x^2}|\le\frac{1}{x^2}$ $(x\ge 1)$ で $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ は収束するから、与式は収束する。

(2) $|\frac{\sin x}{x^{3/2}}|\le\frac{1}{x^{1/2}}$ $(0<x\le 1)$ で $\int_0^1\frac{1}{x^{1/2}}dx$ は収束するから、与式は収束する。

(3) $(\cos x^4)'=-4x^3\sin x^4$ より $M>1$ に対し、$\int_1^M\sin x^4dx=\int_1^M\frac{1}{4x^3}(-\cos x^4)'dx=-\frac{\cos M^4}{4M^3}+\frac{\cos 1}{4}+\int_1^M(\frac{1}{4x^3})'\cos x^4dx=-\frac{\cos M^4}{4M^3}+\frac{\cos 1}{4}-\int_1^M\frac{3\cos x^4}{4x^4}dx$. ここで、$\left|\frac{\cos M^4}{4M^3}\right|\le\frac{1}{4M^3}$ よりはさみうちにから $\lim_{M\to\infty}\frac{\cos M^4}{4M^3}=0$. また、$\left|\frac{\cos x^4}{x^4}\right|\le\frac{1}{x^4}$ で $\int_1^\infty\frac{1}{x^4}dx$ は収束するから $\int_1^\infty\frac{3\sin x^4}{4x^4}dx$ も収束する。以上より、$\int_1^\infty\sin x^4dx$ は収束することがわかった。

4 [8] $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ より $(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2=(r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta)^2+(r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta)^2=r'(\theta)^2+r(\theta)^2=4(\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}+\sin^6\frac{\theta}{3})=4\sin^4\frac{\theta}{3}$. よって、$\ell=\int_0^{3\pi}\sqrt{4\sin^4\frac{\theta}{3}}d\theta=[\theta-\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}\theta]_0^{3\pi}=3\pi$.

5 [16] (1) $I_n:=\log\{(\text{与式})\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\log(3+(\frac{k}{n})^2)\to\int_0^1\log(3+x^2)dx$ で、$\int_0^1\log(3+x^2)dx=\int_0^1x'\log(3+x^2)dx=[x\log(3+x^2)]_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{3+x^2}dx=\log 4-\int_0^1(2-\frac{6}{3+x^2})dx=\log 4-[2x-\frac{6}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{x}{\sqrt{3}}]_0^1=\log 4-2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. ($\mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ に注意。) よって、(与式)$=\lim_{n\to\infty}e^{I_n}=4e^{-2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$.

(2) $x\to 0$ のとき $\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt\to 0$, $x^3\to 0$ より不定形で、$\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt)=2x\sin\sqrt{x^2}=2x\sin|x|$, $(x^3)'=3x^2$ で $\lim_{x\to+0}\frac{2x\sin|x|}{3x^2}=\frac{2}{3}$ となるから、l'Hopital の定理より (与式)$=\frac{2}{3}$ となる。

6 [10] $s=x-t$ とおくと、$ds=-dt$ で $\begin{array}{c|c} t & 0\to 1 \\ \hline s & x\to x-1\end{array}$ より、$\varphi(x)=\int_x^{x-1}(x-s)f'(s)(-1)ds=x\int_{x-1}^x f'(s)ds-\int_{x-1}^x sf'(s)ds$. よって、$\int_{x-1}^x g(s)ds=\int_0^x g(s)ds-\int_0^{x-1}g(s)ds$ より $\frac{d}{dx}\int_{x-1}^x g(s)ds=g(x)-g(x-1)$ であることに注意して、$\varphi'(x)=\int_{x-1}^x f'(s)ds+x(f'(x)-f'(x-1))-(xf'(x)-(x-1)f'(x-1))=f(x)-f(x-1)-f'(x-1)$.

- 解答用紙左上に記入してある ABCDF は順に微分積分学 AD I, 数学序論演習 I の成績です。基準は 5 回の試験の点の合計点が 110 点以下は FF, 111 ∼ 135 点は CC (6 名), 136 ∼ 160 点は CB (8 名), 161 ∼ 175 点は BB (7 名), 176 ∼ 215 点は BA (7 名), 216 点以上は AA (4 名) としました。その横の数字は合計点数です。夏休みの勉強はとても大切です。今期勉強したことは後期のこの授業で引き続き勉強する事柄でありそれ以上に今後 4 年間勉強する解析系幾何系科目や確率統計などの基礎となる事柄です。今回の成績にかかわらず、夏休み復習に励んでください。後期も (こそ) 合格してくれると期待しています。

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 111 点である。平均 40.53 点、標準偏差 18.51 点でした。

[2] これは広義積分であるから単に (与式)$=[\frac{3}{2}(x+2)^{2/3}]_{-2}^0=3/\sqrt[3]{2}$ とした解答は大幅に減点した。