微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 7 月 11 日の試験の解答の要点[1]

1 [8+5+24] (1) $I = \int x^2 \operatorname{Arccos} x dx = \int (\frac{1}{3}x^3)' \operatorname{Arccos} x dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arccos} x + \int \frac{1}{3}x^3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ で, $t = 1 - x^2$ とおくと $\int \frac{1}{3}x^3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}\int (1-t)\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{9}(t-3)\sqrt{t}$. よって、$I = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arccos} x - \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

(2) (与式)$= x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$ より $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{Arctan} x$.

(3) $t = \tan\frac{x}{2}$ とすると、$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ より
$\int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \int \frac{1-t^2}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}$.

(4) $t = \tan x$ とすると、$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ より $I = \int \frac{\cos^2 x}{3+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{(1+t^2)(3+4t^2)}dt = \int(\frac{4}{3+4t^2} - \frac{1}{1+t^2})dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2}{\sqrt{3}}t - \operatorname{Arctan} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x) - x$.

(5) $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ とすると $1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$ となるので、$A = 1, B = -1, C = 0, D = -1, E = 0$. よって、$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2})dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\frac{1}{1-2}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)}$.

2 [10] (1) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x^2-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))^2}{x^2(x+O(x^3))^2} = \frac{x^2-(x^2-\frac{1}{3}x^4+O(x^6))}{x^4+O(x^6)} = \frac{\frac{1}{3}x^4+O(x^6)}{x^4+O(x^6)} \to \frac{1}{3}\ (x \to 0)$.

(2) $\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}} = (1 - \frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{n}})^2 + O((\frac{x}{\sqrt{n}})^4))^n = (1 - \frac{1}{n}\frac{x^2}{2} + O(\frac{x^4}{n^2}))^n \to e^{-x^2/2}\ (n \to \infty)$.

(別解) $x = 0$ のとき極限は 1. $x \neq 0$ のとき $\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}{n} = -(\frac{\sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}})^2\frac{x^2}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}+1} \to -\frac{x^2}{2}\ (n \to \infty)$ より、$\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}} = (1 + (\cos\frac{x}{\sqrt{n}} - 1))^{\frac{1}{\cos x/\sqrt{n}-1}\frac{\cos x/\sqrt{n}-1}{n}} \to e^{-x^2/2}\ (n \to \infty)$. よって、極限は $e^{-x^2/2}$.

3 [14] (1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 1$. 両辺を微分して $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) + \sqrt{1-x^2}f''(x) = 0$. よって、$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$. $((1-x^2)f'')^{(n-1)} = \sum_k \binom{n-1}{k}(1-x^2)^{(k)}(f'')^{(n-1-k)} = (1-x^2)f^{(n+1)} - 2(n-1)xf^{(n)} - (n-1)(n-2)f^{(n-1)}$. $(xf')^{(n-1)} = xf^{(n)} + (n-1)f^{(n-1)}$ となるから与式を得る。

(2) (1) より $f^{(n+1)}(0) = (n-1)^2 f^{(n-1)}(0)$ であるから、$f(0) = 0$ より $f^{(2n)}(0) = 0$. また、$f'(0) = 1$ より $f^{(3)}(0) = 1$, $f^{(5)}(0) = 3^2$. 近似式は $f(x) = \sum_{k=0}^{5}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\ (x \to 0)$.

4 [7] $F(x)$ をヒントのように定義すると、$F'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(a) + f'(x)) - \frac{1}{2}(x-a)f''(x) + 3K(x-a)^2$, $F''(x) = -\frac{1}{2}(x-a)f'''(x) + 6K(x-a)$. よって、$F(a) = F'(a) = 0$ であるから、Taylor の公式により $F(b) = \frac{1}{6}F''(c)(b-a)^2$, $a < c < b$ を満たす c がある。$F(b) = 0$ より $(-\frac{1}{2}f'''(c) + 6K)(c-a) = 0$ であるが、$K = \frac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - [f(a) + \frac{1}{2}(b-a)\{f'(a) + f'(b)\}]\right)$ であるから与式を得る。

5 [10] (1) $\alpha := \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3}$ は $\frac{0}{0}$ で不定形。$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{Arctan} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$ より l'Hopital の定理より $\alpha = \frac{1}{3} \neq 0$. よって、3 位の無限小となる。

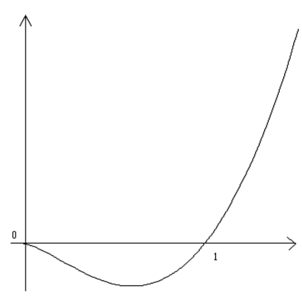
(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^{100}}{x^\alpha} = 0$ を示せばよいが、このためには $\beta = \frac{\alpha}{100}$ として $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\beta} = 0$ を示せばよい。これは $\frac{\infty}{\infty}$ より不定形で $(\log x)' = \frac{1}{x}$, $(x^\beta)' = \beta x^{\beta-1}$ で $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\beta x^{\beta-1}} = 0$ より l'Hopital の定理より従う。

6 [5] $g(x) := e^{-cx}f(x) \geq 1\ (x > 0)$ を示せばよい。$g'(x) = -ce^{-cx}f(x) + e^{-cx}f'(x) = (-cf(x) + f'(x))e^{-cx} \geq 0$. よって、$g(x)$ は広義単調増加で $g(0) = 1$ より $g(x) \geq 1\ (x > 0)$ を得る。

7 [7] $y' = 2x(\log x + \frac{1}{2})$, $y' = 0$ より $x = e^{-1/2}$.
$y'' = 2\log x + 3$, $y'' = 0$ より $x = e^{-3/2}$ より
増減表を書くと

x	0	$\cdots$	$e^{-3/2}$	$\cdots$	$e^{-1/2}$	$\cdots$	∞
y'	0	$-$	／	$-$	0	$+$	／
y''	／	$-$	0	$+$	／	$+$	／
y	0		$-\frac{3}{2}e^{-3}$		$-\frac{1}{2}e^{-1}$		∞

以上よりグラフは右のようになる。



[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 90 点である。平均 28.04 点、標準偏差 14.31 点でした。