微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 6 月 20 日の試験の解答の要点[1]

1 [2+4+8] (1) $\mathrm{Arccos}(-\frac{1}{2}) = x$ とおくと $\cos x = -\frac{1}{2}$, $0 \le x \le \pi$ より $y = \frac{2}{3}\pi$.
$A := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{5\pi}{12}$ であり、$-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{Arcsin}\, A \le \frac{\pi}{2}$ より、$\mathrm{Arcsin}\, A = \frac{5\pi}{12}$. u

(2) $b = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}, c = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$ とすると $\tan a = \frac{1}{5}, \tan b = \frac{1}{239}$. $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より $0 < c < b < \frac{\pi}{6}$, よって $0 < 4b - c < \frac{2\pi}{3}$ を得る。一方、$\tan 2b = \frac{2\tan b}{1-\tan^2 b} = \frac{5}{12}$, $\tan 4b = \frac{2\tan 2b}{1-\tan^2 2b} = \frac{120}{119}$ より $\tan(4b-c) = \frac{\tan 4b - \tan c}{1+\tan 4b \tan c} = \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239+120} = \frac{119\cdot 239 + 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1$. 以上より、$4b - c = \frac{\pi}{4}$ となる。

2 [10] (1) $(与式)' = \left(e^{(\mathrm{Arccos}\, x)\log x}\right)' = x^{\mathrm{Arccos}\, x}\{-\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\mathrm{Arccos}\, x}{x}\}$.

(2) $(与式)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}(2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2}}\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$.

3 [20] (1) $(x^2e^{3x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^{(k)}\left(e^{3x}\right)^{(n-k)} = 3^n x^2 e^{3x} + 2n3^{n-1}xe^{3x} + n(n-1)3^{n-2}e^{3x}$.

(2) $\sin^3 x = \sin x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ で $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + \frac{n}{2}\pi)$ より、$(\sin^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + \frac{n}{2}\pi) - \frac{3^n}{4}\sin(3x + \frac{n}{2}\pi)$.

(3) $\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}$ で $(\frac{1}{x-a})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ より、$(\frac{x}{x^2+3x+2})^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

(4) 数学的帰納法によって示す。$n = 1$ のとき $(\log x)' = \frac{1}{x}$ より成立する。$n-1$ のとき正しいとすると、n のとき、$(x^{n-1}\log x)^{(n)} = ((n-1)x^{n-2}\log x + x^{n-2})^{(n-1)} = (n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{x} = \frac{(n-1)!}{x}$. よって成立する。

4 [5] $z = (x^2-1)^n$ とおくと $z' = n(x^2-1)^{n-1}2x$ より $(x^2-1)z' = 2nxz$. $((x^2-1)z')^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(x^2-1)^{(k)}z^{(n+2-k)} = (x^2-1)z^{(n+2)} + (n+1)2xz^{(n+1)} + (n+1)nz^{(n)}$. $(2nxz')^{(n+1)} = 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(x)^{(k)}z^{(n+1-k)} = 2nxz^{(n+1)} + 2n(n+1)z^{(n)}$. よって $P_n(x) = z^{(n)}$ より与式を得る。

5 [8] $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$ とおくと $f'(x) =$ (計算略) $= 0$. よって、$f(x)$ は区間 $(-\infty, 0), (0, \infty)$ のそれぞれで定数関数となる。(平均値の定理の系として授業で示した。[2]) よって、$\forall x > 0$ に対し $f(x) = f(1)$ を得るが、$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ より、$f(x) = \frac{\pi}{2}$ $(x > 0)$ となる。また、$\forall x < 0$ に対し $f(x) = f(-1)$ となるが、$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ より、$f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $(x < 0)$ となる。

6 [5+8+8+5] (1) 与式は $x \to 0$ のとき $\frac{0}{0}$ で不定形。$\lim_{x\to 0}\frac{(x - \mathrm{Arctan}\, x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$. よって l'Hopital の定理[3]より (与式) $= \frac{1}{3}$.

(2) (与式) $= \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}$. これは $x \to 0$ のとき $\frac{0}{0}$ で不定形。$\alpha_1 := \lim_{x\to 0}\frac{(\log(x+1)-x)'}{(x\log(x+1))'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\log(x+1)+\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{(x+1)\log(x+1)+x}$ となり、これも $x \to 0$ のとき $\frac{0}{0}$ で不定形。$\lim_{x\to 0}\frac{(-x)'}{((x+1)\log(x+1)+x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\log(x+1)+2} = -\frac{1}{2}$. よって l'Hopital の定理より $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ となるが、再び l'Hopital の定理を用いて (与式) $= -\frac{1}{2}$ となる。

(3) 与式の対数をとり $\alpha := \lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2}$ を考える[4]。これは $\frac{0}{0}$ で不定形。$\alpha_1 := \lim_{x\to 0}\frac{(\log\frac{\sin x}{x})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x}$. これも $\frac{0}{0}$ で不定形。$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x - \sin x)'}{(2x^2\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{x}}{4\frac{\sin x}{x}+2\cos x} = -\frac{1}{6}$. 以上より、(3) と同様に l'Hopital の定理を 2 回用いて $\alpha = \alpha_1 = -\frac{1}{6}$ となるから (与式) $= e^{-1/6}$ が従う。

(4) 与式は $x \to \frac{\pi}{2}+0$ のとき $\frac{-\infty}{-\infty}$ で不定形。$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{(\log(x-\frac{\pi}{2}))'}{(\tan x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(\frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}})^2(x-\frac{\pi}{2}) = 0$. よって l'Hopital の定理を用いて (与式) $= 0$.

7 [5] $\{nc_n\}$ は収束するから $\{c_n\}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。また、$\frac{1}{n+1} < h \le \frac{1}{n}$ のとき $nc_n \le \frac{f(h)}{h} \le (n+1)c_n$. $h \to +0$ のとき $n \to \infty$ で $nc_n \to \alpha$, $(n+1)c_n \to \alpha$. よって[5]、$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)}{h} = \alpha$. これは $f(x)$ は $x = 0$ で右側微分可能で $f'_+(0) = \alpha$ を意味している。

---

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 88 点である。

[2]実際に授業中に示したのは「$[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x) = 0$ を満たせば $f(x)$ は定数関数」である。任意の $0 < a < b$ に対して、これを $[a,b]$ 上で考えれば $f(a) = f(b)$ となり、$f(x)$ が $(0,\infty)$ 上で定数関数となる。同様に、$a < b < 0$ でも $f(a) = f(b)$ となるから、$f(x)$ は $(-\infty, 0)$ 上でも定数関数となる。この問題に見るように、$f(x)$ の定義域が分かれているような場合 $(0,\infty)$ と $(-\infty, 0)$ で同じ値をとるとは限らない。

[3]不定形であることを断らずに l'Hopital の定理を用いた場合 1 回につき 3 点減点した。(2) 以降も同じ。

[4]ここで $\log\frac{\sin x}{x} = \log\sin x - \log x$ としてはいけない。$\log x$ の定義域は $x > 0$ であるから、$x < 0$ の場合この右辺は定義されない。$x \to 0$ と書いた場合 $x < 0$ の場合も考慮する必要がある。

[5]$\forall\varepsilon > 0$ に対して $n_0 \in \mathbf{N}$ があって「$n \ge n_0 \Rightarrow |nc_n - \alpha| < \varepsilon, |(n+1)c_n - \alpha| < \varepsilon$」となる。このとき、$\delta = 1/n_0$ とおくと $0 < h < \delta$ とすれば $n \ge n_0$ がとれて $\frac{1}{n+1} < h \le \frac{1}{n}$ となるので $|\frac{f(h)}{h} - \alpha| < \varepsilon$ ($\because\ \alpha - \varepsilon < nc_n \le \frac{f(h)}{h} \le (n+1)c_n < \alpha + \varepsilon$) となる。