微分積分学 AD I, 数学序論演習 I 2006 年 5 月 30 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] (1) $f(x) \to \alpha$ $(x \to a)$ より、ある $\delta_1 > 0$ がとれて $0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $|f(x)-\alpha| < \alpha/2$ とできる。よって、このとき、$f(x) > \alpha/2$ となる。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ をとる。仮定より、ある $\delta_2 > 0$ がとれて $0 < |x-a| < \delta_2$ ならば $|f(x)-\alpha| < \alpha^2\varepsilon/2$ とできる。このとき、$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと (1) を用いて

$0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|f(x)-\alpha|}{\alpha f(x)} < \frac{\alpha^2\varepsilon/2}{\alpha\cdot\alpha/2} = \varepsilon$

となり、証明は完了する。

2 [30] (1) $a^2-b^2 = (a-b)(a+b), c^3-d^3 = (c-d)(c^2+cd+d^2)$ を $a = (2+x)^{1/2}, b = (2-x)^{1/2}, c = (1+2x)^{1/3}, d = 1$ に用いれば、(与式)$= \lim_{x\to 0} \frac{(2+x)-(2-x)}{(2+x)^{1/2}+(2-x)^{1/2}} \frac{(1+2x)^{2/3}+(1+2x)^{1/3}+1}{1+2x-1} = \cdots = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.[2]

(2) (与式)$= \lim_{x\to -1-0} \frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1-0}(-x-2) = -1$

(3) $x \to 0$ のとき $\cos x - 1 \to 0$ より $\frac{\sin(\cos x-1)}{\cos x-1} \to 1$. よって、
(与式)$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x-1)}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x-1)}{\cos x-1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{-1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$.

(4) $x \to 0$ のとき $-2x+x^2 \to 0$ より $(1-2x+x^2)^{1/(-2x+x^2)} \to 1$. よって、
(与式)$= \lim_{x\to 0}\left\{(1-2x+x^2)^{1/(-2x+x^2)}\right\}^{-2+x} = e^{-2}$.

(5) $y = -x$ とおくと、$x \to -\infty$ のとき $y \to \infty$ より、
$(2^x+3^x+4^x)^{1/x} = (2^{-y}+3^{-y}+4^{-y})^{-1/y} = 2\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{2}\right)^y\right\}^{-1/y} \to 2\cdot(1+0+0)^0 = 2$.

(6) $y = -x$ とおくと、$x \to -\infty$ のとき $y \to \infty$ より、
$x(x+\sqrt{x^2+3}) = -y(\sqrt{y^2+3}-y) = -y\cdot\frac{y^2+3-y^2}{\sqrt{y^2+3}+y} = -\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{y^2}}+1} \to -\frac{3}{1+1} = -\frac{3}{2}$.

3 [20] (1) 有界閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し、$f(a) \neq f(b)$ ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間の値 l に対しある $c \in (a,b)$ がとれて $f(c) = l$ となる。

(2) (a) $f(x) = x\tan x$ とする。$f(n\pi) = 0$, $f(n\pi+\frac{\pi}{3}) = (n\pi+\frac{\pi}{3})\sqrt{3}$ より $f(n\pi) < 1 < f(n\pi+\frac{\pi}{3})$ であるから中間値の定理によりある $x_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{3})$ がとれて $x_n\tan x_n = 1$ とできる。また、$f(x) = x\tan x$ は $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加であるから、$x\tan x = 1$ となるのはこの範囲で x_n だけである。

(b) (イ) $\alpha_n = x_n - n\pi$ より $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. また、$n\pi+\alpha_n < (n+1)\pi+\alpha_{n+1}$ より $\tan\alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi+\alpha_{n+1}} < \frac{1}{n\pi+\alpha_n} = \tan\alpha_n$. よって、$\tan x$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加であるから $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ を得る。

(ロ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < x < \tan x$ に注意すると、$0 < \alpha_n < \tan\alpha_n$. また、$\tan\alpha_n = \frac{1}{n\pi+\alpha_n}$ より $\tan\alpha_n \to 0$ $(n \to 0)$. よって、はさみうちにより $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ を得る。

4 [5] 任意の $\delta > 0$ に対し、$y = x+\frac{\delta}{2}$ とすると $|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+\frac{\delta}{2})^2}| = \frac{(2x+\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2}}{x^2(x+\frac{\delta}{2})^2} \to \infty$ $(x \to +0)$. これはどんな $\delta > 0$ をとっても $x, y \in (0,1]$ かつ $|x-y| < \delta$ でありながら $|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}| \geq 1$ となる x, y が存在することを示しているので、一様連続とはならない。[3]

5 [10] (1) $\frac{1}{3} \leq a_n \leq 1$ $(n \geq 1)$ は数学的帰納法より示せる[4]。これより $(2+a_n)(2+a_{n-1}) \geq \frac{49}{9}$ であるから、$|a_{n+1}-a_n| = \left|\frac{1}{2+a_n} - \frac{1}{2+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n-a_{n-1}|}{(2+a_n)(2+a_{n-1})} \leq \frac{9}{49}|a_n-a_{n-1}| \leq \frac{9}{16}|a_n-a_{n-1}|$ を得る。

(2) (1) より $|a_{n+1}-a_n| \leq \frac{9}{49}|a_n-a_{n-1}| \leq \left(\frac{9}{49}\right)^2|a_{n-1}-a_{n-2}| \leq \cdots \leq \left(\frac{9}{49}\right)^{n-2}|a_2-a_1| = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{49}\right)^{n-2}$ を得る。よって、$m > n$ に対し $|a_m-a_n| \leq |a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n| \leq \sum_{k=n+1}^{m}\frac{2}{3}\left(\frac{9}{49}\right)^{k-2} \leq \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{9}{49}\right)^{n-1}}{1-\frac{9}{49}} \to 0$ $(n \to \infty)$. 即ち、Cauchy 列となる。よって、極限を持つので、$\alpha = \lim_{n\to\infty}a_n$ とおくと、与式で $n \to \infty$ とすると $\alpha = \frac{1}{2+\alpha}$. これを解くと $\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$. $\frac{1}{3} \leq a_n \leq 1$ より $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$. よって $\alpha = \sqrt{2}-1$ を得る。

---

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **75 点**である。**注意**: **2** (1)–(6) と **3** (1) について**部分点はなしです**。

[2]$= \cdots =$ は式の整理等を略していることを意味しています。適宜自分で補ってください。

[3]一様連続ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ がとれて $x, y \in (0,1]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}| < \varepsilon$. これの否定となっている。

[4]もちろん証明していない解答は減点した。 平均点 29 点, 標準偏差 14.1 点でした。