微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 5 月 9 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] (1) $\log_2 3$ が有理数と仮定すると、自然数 p, q がとれて $\log_2 3 = p/q$ とできる。このとき、$3^q = 2^p$ となり、左辺は偶数、右辺は奇数となり矛盾する。

(2) $\max A$ が存在するとし、それを a とする。このとき、$a \in A$ で (1) より $\log_2 3$ は無理数だから $a < \log_2 3$ となる。よって、有理数の稠密性 により $a < r < \log_2 3$ となる有理数 r が存在する[2]。このとき、$r \in A$ となり、これは $\max A = a$ より「$x \in A \Rightarrow x \le a$」に矛盾する。

2 [5] まず、$0 \le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \le 1/(2\sqrt{n})$ に注意する。
$\varepsilon > 0$ を任意にとる。アルキメデスの公理により $n_0 > (1/2\varepsilon)^2$ となる $n_0 \in \mathbf{N}$ がとれる。このとき、$n \ge n_0$ ならば $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \le 1/(2\sqrt{n_0}) < \varepsilon$ となり、$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ が示された。

3 [10] (1) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。仮定よりある $n_1 \in \mathbf{N}$ がとれて、$n \ge n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる。よって、$n_0 = n_1 + 1$ とおくと、$n \ge n_0$ ならば $n - 1 \ge n_1$ であるから $|a_{n-1} - \alpha| < \varepsilon$ となり、$\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$ が示された。

(2) $(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1+\frac{1}{n-1}}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \to \frac{1+0}{e} = \frac{1}{e}$.
ここで、$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ に (1) を用いると、$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} = e$ となることを用いた。

4 [10] (1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、ある $n_1 \in \mathbf{N}$ がとれて、$n \ge n_1$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$, 即ち、$|a_n| < |a| + 1$ となる。従って、$L = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_1}|, |\alpha| + 1\}$ とおくと、すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $|a_n| \le L$ を得る。

(2) $|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \le |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta|$ に注意する。
$\varepsilon > 0$ を任意にとる。(1) よりある $L > 0$ が存在して $|a_n| \le L$ となる。
$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、ある $n_2 \in \mathbf{N}$ がとれて、$n \ge n_2$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2L}$ で、
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、ある $n_3 \in \mathbf{N}$ がとれて、$n \ge n_3$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ となる。
よって、$n_0 = \max\{n_2, n_3\}$ とおけば、$n \ge n_0$ のとき、$|a_n b_n - \alpha\beta| < L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}|\beta| < \varepsilon$ を得る。

5 [10] (1) $n \ge 2$ とする。二項定理より $2^n = (1+1)^n > n + \frac{n(n-1)}{2}$ であるから $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$ を得る。
よって $\frac{2}{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$ より「はさみうち」により与式が成立する。

(2) $3^n \le 1 + 2^n + 3^n \le 3 \cdot 3^n$ より $3 \le (1 + 2^n + 3^n)^{1/n} \le 3^{1/n} \cdot 3$. $\lim_{n\to\infty} 3^{1/n} = 1$ より $3^{1/n} \cdot 3 \to 3$.
よって、「はさみうち」により与式は成立する。

6 [10] (1) $0 \le a_n \le 1$, $a_n \le a_{n+1}$ $(n \ge 1)$ を証明すればよい。
(数学的帰納法により容易に示せるので証明は略す。)

(2) $\{a_n\}$ は有界な増加列より収束する。$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと、与式で $n \to \infty$ とすると $\alpha = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2)$.
これを解くと $\alpha = 2 \pm \sqrt{2}$. $0 \le a_n \le 1$ より $0 \le \alpha \le 1$. よって $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ を得る。

平均 11.06 点、標準偏差 10.45 点でした。[3]

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は **55 点**である。
[2]「有理数の稠密性」に言及していない解答は減点した。
[3]ちなみに偏差値は $[50 + (\text{自分の得点} - \text{平均点})/\text{標準偏差}]$ で得られます。